МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕХАНІКА ГІРОСКОПІЧНИХ СИСТЕМ

Науково-технічний збірник

Заснований у 1982 році

ВИПУСК 21

Київ 2010

УДК 531

Редакційна колегія:

Збруцький О. В. – д.т.н., проф., декан ФАКС НТУУ «КПІ» *(відповідальний редактор)*
Савін В. Г – д.т.н., проф., зав. кафедри НТУУ «КПІ» *(заступник відповідального редактора)*
Алексейчук О. М. – к.т.н., доцент НТУУ «КПІ» *(відповідальний секретар)*
Шульга М. О. – член.-кор. НАН України, д. ф.-м. н., проф., зав. відділом Інституту механіки НАН України
Харламов П. М. – член.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.
Рижков Л. М. – д.т.н., проф. НТУУ «КПІ»
Дідковський В.С. – д.т.н., проф., зав. кафедри НТУУ «КПІ»
Закржевський О.Є. – д.т.н., с.н.с., зав. відділом Інституту механіки НАН України;
Лисенко О.І. – д.т.н., проф. НТУУ „КПІ”;
Карпачов Ю.А. – д.т.н., проф. НТУУ «КПІ»;
Горошко О. О. – д.ф.-м.н., проф. Київського державного університету ім. Т. Г. Шевченка
Ларін В. Б. – д.ф.-м.н., проф., зав. відділом Інституту механіки НАН України
Канченко В.Я. – д.т.н., гол. наук. співр. НТУУ «КПІ»
Петренко В. Є. – д.т.н., проф., зав. лаб. НТУУ «КПІ»
Новицький В. В. – д.ф.-м.н., проф., зав. відділом Інституту математики НАН України
Щербина Є. С. – к.ф.-м.н., доцент НТУУ «КПІ»
Попов В. В. – к.т.н., доцент НТУУ «КПІ»

Науково-технічний редактор – Штефан Н. І., доцент НТУУ «КПІ»
Розробка оригінал-макету – Степаненко С. Г., пров. інж. НТУУ «КПІ»

Адреса редакційної колегії: НТУУ «Київський політехнічний інститут», кафедра теоретичної механіки, проспект Перемоги, 37, м. Київ, 030056, тел.: 454-94-07.

Матеріал до друку затверджено на засіданні Вченої ради НТУУ «КПІ» протокол № 5 від 17 травня 2010 року.
Свідоцтво про державну реєстрацію збірника – серія КВ №15068-3640р, видане 06.04.2009р.

©Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
Факультет авіаційних та космічних систем

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE
“KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE”

MECHANICS OF GYROSCOPIC SYSTEMS

Founded in 1982
Scientific and technical journal

ISSUE 21

Kyiv 2010

UDK *531*

Editorial Board:
Oleksandr V. Zbrutsky, Doct. Tech. Sci., Prof., Dean of Aviation and Space Systems Department of NTUU “KPI”, *(Editor-in-chief)*;
Victor G. Savin, Doct. Tech. Sci., Prof., Head of Department of NTUU “KPI” *(Deputy Editor-in-chief)*;
O. M. Aleksejchuk, PhD, Associate professor of NTUU “KPI” *(Executive secretary)*
M.O. Shulga, correspond. Member of Nat. Acad. Sci. Ukraine, Doct. Phys. Mat. Sci., Prof., Chief of Department of S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of Nat. Acad. of Sci. of Ukraine;
L. M. Ryzhkov, Doct. Tech. Sci., Prof. of NTUU “KPI”;
V. S. Didkovsky, Doct. Tech. Sci., Prof., Head of Department of NTUU “KPI”;
O. E. Zakrjevsky, Doct. Tech. Sci., Chief of Department of S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of Nat. Acad. of Sci. of Ukraine;
O. I. Lysenko, Doct. Tech. Sci., Prof. of NTUU “KPI”;
Y. A. Karpachov, Doct. Tech. Sci., Prof. of NTUU “KPI”;
Y. A. Goroshko, Doct. Phys. Mat. Sci., Prof. of KSU named after Taras Shevchenko;
V. B. Larin, Doct. Phys. Mat. Sci., Chief of Department of S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of Nat. Acad. of Sci. of Ukraine;
P. M. Kharlamov, correspond. Member Nat. Acad. Sci. Ukraine, Doct. Phys. Mat. Sci., Prof.;
V. J. Kanchenko, Doct. Tech. Sci., Chief Staff Scientist of NTUU “KPI”;
V. J. Petrenko, Doct. Tech. Sci., Prof., Head of laboratory of NTUU “KPI”;
V.V. Novitsky, Doct. Tech. Sci., Prof., Chief of Department of S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of Nat. Acad. of Sci. of Ukraine;
J. S. Shcherbina, PhD of Phys. Mat. Sci., Associate Prof. of NTUU “KPI”;
V. V. Popov, PhD, Associate Prof. of NTUU “KPI”.

scientific and technical editor –N. I. Stefan, PhD, Associate prof. of NTUU “KPI”
design layout S. G. Stepanenko, chief engineer

Editorial office address: National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Department of Aerospace
37, Prospect Peremohy, Bd. 28; office 201
03056, Kyiv,Ukraine
tel./fax: +(38044)241-7621

Material for publication approved at Academic Board NTU "KPI" protocol number 5 dated 17 May 2010.
Certificate of registration of the collection - a series of 15 068-KV number 3640r issued 06.04.2009r.

© National Technical University of Ukraine
"Kyiv Polytechnic Institute"
Faculty of aviation and space systems

З М І С Т

Гіроскопи та навігаційні системи **5**

1. **V. Apostolyuk, I. Gorbunovich**
Mathematical model of coriolis vibratory gyroscopes motion trajectory 5

Системи та процеси керування **13**

2. **О. В. Збруцький, С. П. Маляров, Т. В. Стеценко**
Синтез багатовимірних систем керування з симетрією 13

3. **О.М. Мелащенко, Л.М. Рижков, Фам Ба Кхань**
Магнітно-маховичне керування мікросупутником 19

4. **С. В. Морозов, К .В. Тохтамишева**
Формування задачі автоматичного керування повітряного судна на етапі заходу на посадку з довільним кутом підходу до злітно-посадочної смуги 24

5. **М. Г. Черняк**
Похибки навігаційного маятникового компенсаційного акселерометра від дії просторових вібрацій основи 30

6. **Т. А. Марченко, В. В. Попов**
Автоматическое управление продольным движением самолета при наборе высоты 41

Прилади і методи контролю **49**

7. **Ю. М. Туз, О. М. Кривченкова, О. В. Синьоока**
Похибки термокомпарування із застосуванням методів апроксимації 49

8. **Е. Т. Володарский, Н. А. Рековец**
Методы оценки приемлемости результатов испытаний дорогостоящих уникальных объектов 63

9. **А. С. Шантырь**
Совмещение выборок периодического процесса при несинхронных отсчетах в информационно-измерительной системе роторной машины 71

10. **В. В. Літвіх, С. А. Богомазов, Ю. С. Шумков, А. О. Назаренко**
Аналіз алгоритмів вимірювання похибки різнополярності перетворювачів напруги термоелектричних 84

11. **О. М. Сікоза, О. Ю. Редьога, Н. А. Яремчук**
Аналіз функціонування системи з індивідуальною траєкторією навчання 94

12. **Е. В. Козыр**
Этапы обработки данных при малых выборках 103

Механіка деформівного твердого тіла **112**

13. **О. В. Микитченко, О. П. Мариношенко**
Математична модель вихрового руху суцільного середовища 112

14. **С. И. Трубачев, О. Н. Алексейчук**
Колебания стержней переменного сечения 123

15. **Д. М. Зінченко, Т. В. Драган**
Оцінка впливу відхилень поверхні крила надкритичного профілювання на аеродинамічні характеристики літака 128

Інформація **135**

16. **О. В. Малюкін, В. В. Піддубний, В. О. Піддубний**
Пристої підвищення економічності двигунів внутрішнього згорання надлегких літальних апаратів 135

17. **В. В. Сухов, Ю. І. Бондар**
Технології розрахунків зовнішніх навантажень на несучі поверхні літака 141

Анотації **150**

УДК 53.088:62 – 754.2 (045)

V. Apostolyuk, I. Gorbunovich

MATHEMATICAL MODEL OF CORIOLIS VIBRATORY GYROSCOPES MOTION TRAJECTORY

Introduction

In relatively recent times Coriolis vibratory gyroscopes (CVGs) received significant amount of interest from the engineering community due to the promising possibility to fabricate sensitive elements of such gyroscopes in miniature form by using modern microelectronic mass-production technologies. At the same time, in comparison to other types of angular rate sensors, such gyroscopes provide designers with rich on feature measuring capabilities, including possibility to implement integrating gyro [1]. However, this often requires quite sophisticated analysis of the sensitive element motion, in order to make possible building different types of service control systems targeting different aspects of CVG operation. One of the problems, associated with the CVG control systems development, has been recently resolved, when simple and yet accurate transfer function of the sensitive element was derived [2]. Another set of problems, such as quadrature error compensation and trajectory control, requires analysis of the sensitive element trajectory, which has not yet been addressed due to the peculiarities of the CVG mathematical models.

In this paper we are going to address this problem and derive relatively simple mathematical model of the sensitive element trajectory parameters.

Problem formulation

One could consider the CVG sensitive element as a two-dimensional pendulum, whose steady state trajectory forms a rotated ellipse, as shown in fig. 1. In this figure, a and b are the big and small half-axes of the ellipse, θ is the angle of the ellipse rotation relatively to the axes of primary x_1 and secondary x_2 oscillations. It is well-known, that these parameters (namely half-axes and angle of rotation) depend on amplitudes and phases of primary and secondary oscillations, which in turn depend on parameters of the sensitive element design and unknown angular rate.

The problem, which is to be addressed in this paper, is to develop and analyse mathematical model of the ellipse parameters as a functions of the sensitive element design and its rotation.

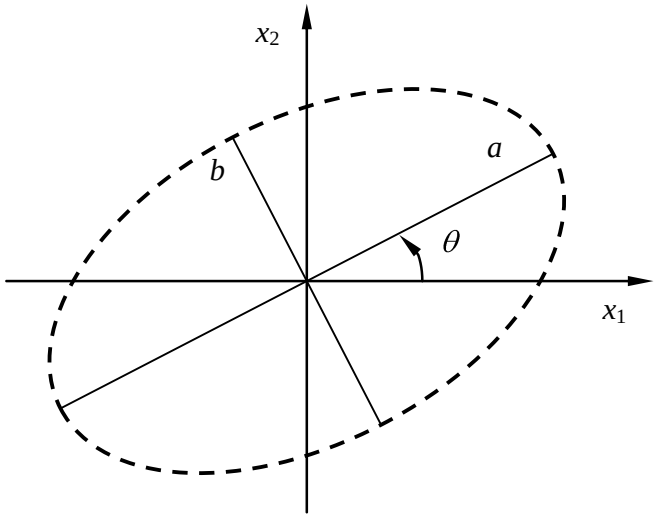


Fig. 1. Sensitive element motion trajectory

Ellipse parameters

Without loss of generality, primary and secondary coordinates of the CVG sensitive element in its steady motion can be represented as

$$x_1(t) = A_1 \cos \omega t,$$
$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi) = A_2[\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi], \quad (1)$$

where A_1 and A_2 are the primary and secondary amplitudes, φ is the phase shift between the primary and secondary oscillations, ω is the circular oscillations frequency. First of all, we have to exclude terms containing oscillation phase ωt from the equations (1). For that we express sine and cosine of the ωt from the first equation and substitute them into the second one, yielding

$$\frac{x_1}{A_1} \cos \varphi - \frac{x_2}{A_2} = \pm \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A_1^2}} \sin \varphi. \quad (2)$$

Squaring both sides of the equation (2) results in

$$\frac{x_1^2}{A_1^2} + \frac{x_2^2}{A_2^2} - \frac{2 x_1 x_2 \cos \varphi}{A_1 A_2} = \sin^2 \varphi. \quad (3)$$

Assuming that X_1 and X_2 are the coordinates of the sensitive element in the coordinate system that is rotated by the angle θ, they are related to the original coordinates as

$$x_1 = X_1 \cos \theta - X_2 \sin \theta,$$
$$x_2 = X_1 \sin \theta + X_2 \cos \theta. \quad (4)$$

In these coordinates ellipse equation must have its canonical form

$$\frac{X_1^2}{a^2}+\frac{X_2^2}{b^2}=1.$$

Substituting (4) into (3) gives

$$X_1^2\frac{A_2^2\cos^2\theta-A_1A_2\cos\varphi\sin 2\theta+A_1^2\sin^2\theta}{A_1^2A_2^2}+$$

$$+X_1X_2\frac{(A_1^2-A_2^2)\sin 2\theta-2A_1A_2\cos\varphi\cos 2\theta}{A_1^2A_2^2}+$$

$$+X_2^2\frac{A_1^2\cos^2\theta+A_1A_2\cos\varphi\sin 2\theta+A_2^2\sin^2\theta}{A_1^2A_2^2}=\sin^2\varphi. \qquad (5)$$

Apparently, second term in the equation (5) must disappear to make this equation canonical. This will occur if θ satisfies the following condition:

$$\theta=\frac{1}{2}\arctan\frac{2A_1A_2\cos\varphi}{A_1^2-A_2^2}. \qquad (6)$$

If angle θ is taken according to (6) then half-axes of the ellipse will be given by the following expressions:

$$a=\frac{A_1A_2\sin\varphi}{\sqrt{A_2^2\cos^2\theta-A_1A_2\cos\varphi\sin 2\theta+A_1^2\sin^2\theta}},$$

$$b=\frac{A_1A_2\sin\varphi}{\sqrt{A_1^2\cos^2\theta+A_1A_2\cos\varphi\sin 2\theta+A_2^2\sin^2\theta}}. \qquad (7)$$

Now we have to express half-axes *a* and *b* of the ellipse, and its angle of rotation θ in terms of the sensitive element parameters and external angular rate.

Zero phase shift approximation

In perfectly tuned CVG, which means that primary and secondary eigenfrequencies are matched, phase shift is zero ($\varphi=0$). This allows us to approximate expressions (6) and (7) with the linear terms of its Taylor series representation around zero phase shift:

$$a\approx\frac{A_1A_2\varphi}{A_2\cos\theta-A_1\sin\theta},$$

$$b\approx\frac{A_1A_2\varphi}{A_1\cos\theta+A_2\sin\theta}. \qquad (8)$$

One should note, that in approximations (8) zero phase shift results in zero big half-axis *a*, which apparently is not acceptable in trajectory analysis applications.

Let us study in greater details dependencies (7) for the elliptical trajectory of the CVG sensitive element. Obviously, formula (7) for the big half-axis has a peculiarity in vicinity of the zero phase shift, when denominator of the formula may become zero. However, far from the zero phase, this function is quite smooth and has no such peculiarities. From the extensive analysis of this dependency the following simple approximation is suggested:

$$a \approx A_1 + \frac{A_2^2}{4}(1+\cos 2\varphi). \tag{9}$$

Relative error of the approximation (8) is shown in fig. 2.

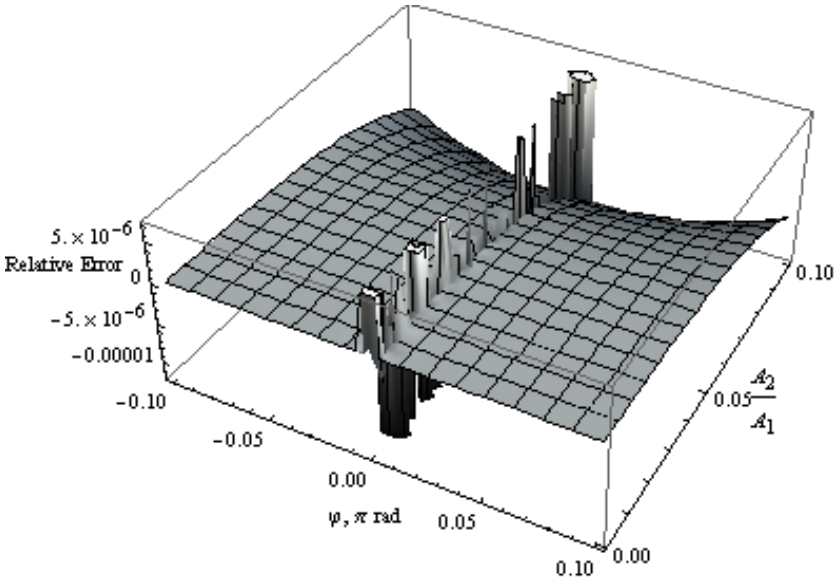


Fig. 2. Relative error of the big half axis approximation

Observable singularities along the zero phase shift in fig. 2 demonstrate that approximation is more relevant than the initial formula. It is easy to see, that approximation (9) is certainly accurate enough for small phase shifts and small relative secondary amplitudes, which are typical for the CVG sensitive element motions.

Let us now analyse how elliptical trajectory parameters depend on the external angular rate and sensitive element characteristics.

Primary and secondary oscillations

In the most generalized form, motion equations of the CVG sensitive element both with translational and rotational motion could be represented in the following form [3]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1 k_1 \dot{x}_1 + (k_1^2 - d_1\Omega^2)x_1 + g_1\Omega\dot{x}_2 + d_3\dot{\Omega}x_2 = q_1 \ t \ , \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2 k_2 \dot{x}_2 + (k_2^2 - d_2\Omega^2)x_2 - g_2\Omega\dot{x}_1 - \dot{\Omega}x_1 = q_2 \ t \ . \end{cases} \quad (10)$$

Here x_1 and x_2 are the generalized coordinates that describe primary (excited) and secondary (sensed) motions of the sensitive element respectively, k_1 and k_2 are the corresponding natural frequencies, ζ_1 and ζ_2 are the dimensionless relative damping coefficients, Ω is the measured angular rate, which is orthogonal to the axes of primary and secondary motions, q_1 and q_2 are the generalized accelerations due to the external forces acting on the sensitive element. The remaining dimensionless coefficients are different for the sensitive elements exploiting either translational or rotational motion. For the translational sensitive element they are $d_1 = d_2 = 1$, $d_3 = m_2 / \ m_1 + m_2 \ $, $g_1 = 2m_2 / \ m_1 + m_2 \ $, $g_2 = 2$, where were m_1 and m_2 are the masses of the outer frame and the internal massive element. In case of the rotational motion of the sensitive element, these coefficients are the functions of different moments of inertia (for greater details see [3]).

Steady state solution of the equations (10) in terms of amplitudes and phases of primary and secondary oscillations can be represented as follows:

$$A_1 = \frac{q_{10}}{k^2\sqrt{(1-\delta\omega^2)^2 + 4\zeta_1^2\delta\omega^2}},$$

$$A_2 = \frac{A_1 g_2 \delta\omega}{\sqrt{\delta k^4 + \delta\omega^2 - 2\delta k^2\delta\omega^2(1-2\zeta_2^2)}}\delta\Omega,$$

$$\varphi_1 = -\arctan\frac{2\delta\omega\zeta_1}{1-\delta\omega},$$

$$\varphi_2 = -\arctan\frac{\delta k^2 - (1 + 4\zeta_1\zeta_2\delta k + \delta k^2)\delta\omega^2 + \delta\omega^4}{2\delta k\delta\omega(\zeta_2 + \zeta_1\delta k) - 2\delta\omega^3(\zeta_1 + \zeta_2\delta k)}. \quad (11)$$

Here q_{10} is the amplitude of accelerations created by the primary excitation system, k is the primary natural frequency, $\delta\omega = \omega / k$ is the relative excitation frequency, $\delta k = k_2 / k_1$ is the ratio of the secondary and primary natural frequencies, $\delta\Omega = \Omega / k$ is the relative angular rate. Angular rate is assumed to be negligible in comparison to the natural frequencies.

One should note that the sensitive element trajectory parameters depend on the phase shift $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ between primary and secondary phases. Most importantly, based upon (9), phases of do not depend on angular rate.

In case of primary resonance ($\delta\omega = 1$), sine and cosine of this phase shift can be calculated as

$$\sin\varphi = \frac{1-\delta k^2}{R}, \quad (12)$$

$$\cos\phi = \frac{2\zeta_2 \delta k}{R},$$

$$R = \sqrt{\delta k^4 - 2(1-2\zeta_2^2)\delta k^2 + 1}.$$

Expressions (11) along with the phase shift representations (12) can now be used to analyse parameters of the actual trajectory of the CVG sensitive element.

Sensitive element motion trajectory parameters

Let us now substitute expressions (11) and (12) into the formula for the big half-axis approximation (9):

$$a = \frac{q_{10}(4k^2R^2\zeta_1 + g_2^2 q_{10}\delta\Omega^2)}{8k^4R^2\zeta_1^2}. \tag{13}$$

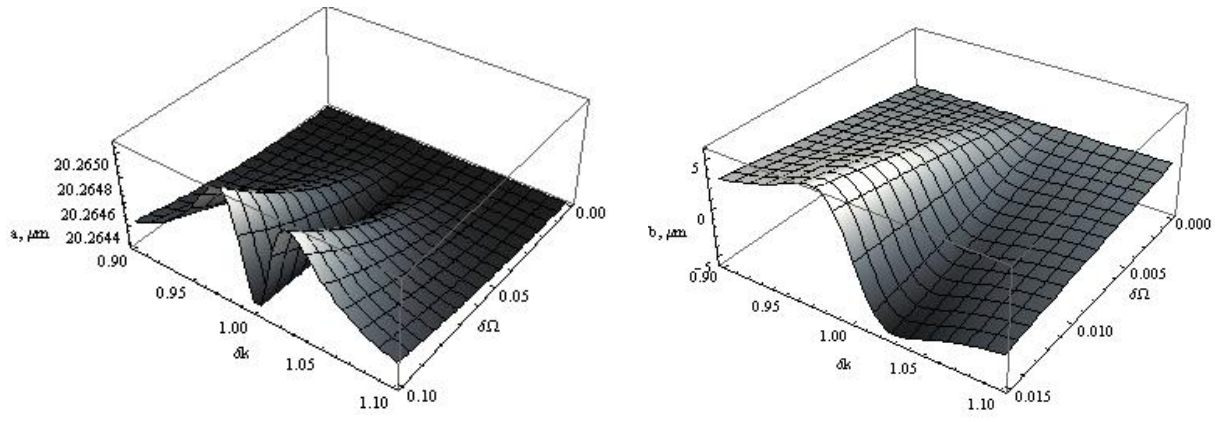
In case of the small angular rates ($\delta\Omega^2 \approx 0$), big half-axis, as expected, becomes the primary amplitude:

$$a \approx \frac{q_{10}}{2k^2\zeta_1} = A_1\big|_{\delta\omega=1}.$$

Small half axis of the sensitive element trajectory is given as

$$b = \frac{q_{10}g_2(1-\delta k^2)}{\sqrt{2}k^2R\zeta_1\sqrt{R^2 + g_2^2\delta\Omega^2 + \sqrt{R^4 - 2g_2^2(R^2 - 8\zeta_2^2\delta k^2)\delta\Omega^2 + g_2^4\delta\Omega^4}}}\delta\Omega. \tag{14}$$

Both big and small half-axes, as a functions of the angular rate and natural frequency ratio are shown in fig. 3.



a) b)

Fig. 3. Half axes of the sensitive element trajectory as a functions of the angular rate and natural frequency ratio (a – big half axis, b - small half axis)

Formula (13) can be accurately replaced with its linear approximation yielding:

$$b \approx \frac{q_{10} g_2 (1-\delta k^2)}{2k^2 \zeta_1 [1-2(1-2\zeta_2^2)\delta k^2 + \delta k^4]} \delta\Omega . \tag{15}$$

Analysing formulae (14) or (15) one can see, that small half axis is absent in either of two cases: perfect match of the natural frequencies ($\delta k = 1$) or absence of the external angular rate ($\delta\Omega = 0$).

Finally, the last but not the least, angle of the trajectory rotation θ can be calculated using the following expression:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{4 g_2 \zeta_2 \delta k \delta\Omega}{1-2(1-2\zeta_2^2)\delta k^2 + \delta k^4 - g_2^2 \delta\Omega^2} \right]. \tag{16}$$

Similarly to the previous case, we can linearly approximate formula (16) for small angular rates:

$$\theta = \frac{2 g_2 \zeta_2 \delta k \delta\Omega}{1-2(1-2\zeta_2^2)\delta k^2 + \delta k^4} . \tag{17}$$

Or, in case of perfectly matched primary and secondary natural frequencies ($\delta k = 1$), it becomes

$$\theta \approx \frac{g_2}{2\zeta_2} \delta\Omega . \tag{18}$$

Both accurate expression (16) and its linear approximation (18) are shown in the fig. 4 below.

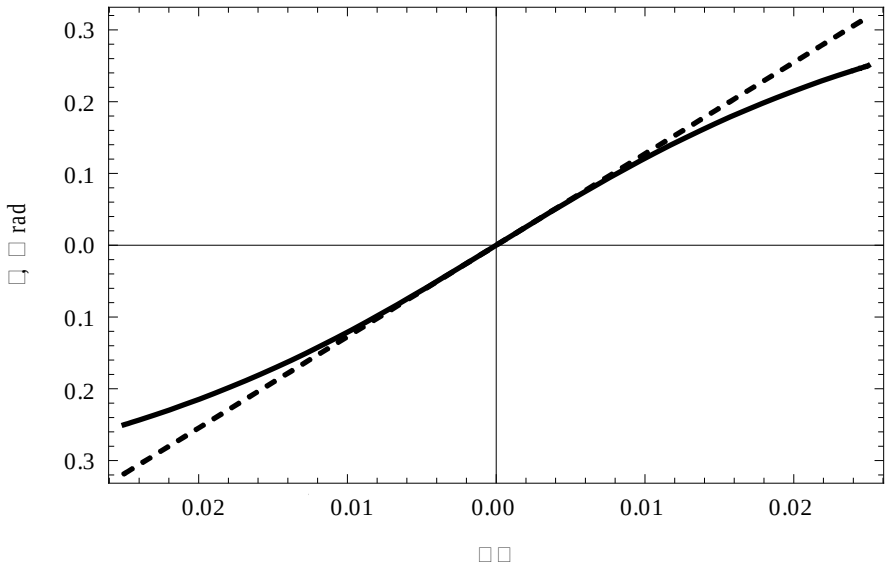


Fig. 4. Trajectory rotation angle as a function of angular rate (solid - accurate, dashed – linear approximation)

From the graphs in fig. 4 one could see, that trajectory rotation angle is almost linear function of the unknown angular rate, which makes it possible to use this parameter to measure angular rate. Let us finally verify obtained dependencies for the CVG sensitive element motion trajectory parameters by means of comparison with the direct numerical simulations based on the equations (10). Resulting trajectories are presented in fig. 5 below.

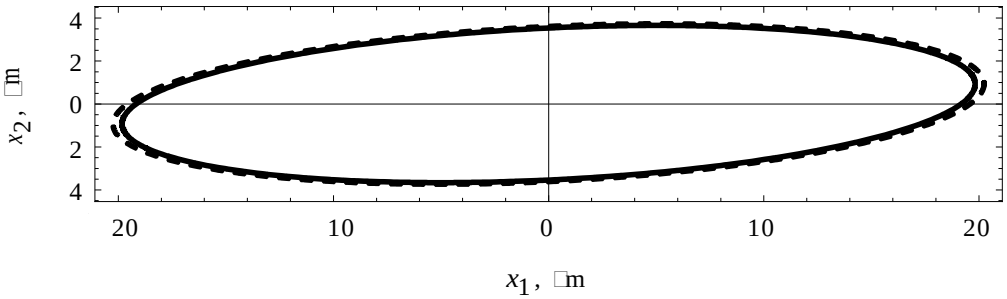


Fig. 5. CVG Trajectory simulation (solid – simulated, dashed – theoretical)

Here solid line demonstrates steady motion trajectory of the simulated CVG sensitive element, and dashed line corresponds to the trajectory, generated from the obtained in the paper ellipse parameters.

Conclusions

Both accurate and approximated new dependencies for the steady motion trajectory parameters, such as half axes and rotation angle, of the CVG sensitive element as functions of CVG design characteristics and external angular rate were obtained in this paper. Comparison with the results of numerical simulation demonstrates high accuracy of the obtained mathematical models. These dependencies allow not only further analysis of the sensitive element motion, but efficient synthesis of many different control loops improving overall CVG performance as well. The latter suggested as topics of the future research.

References

1. *Lynch D.* Vibratory gyro analysis by the method of averaging // Proc. 2nd St. Petersburg Conf. on Gyroscopic Technology and Navigation, St. Petersburg, 1995, pp. 26-34.
2. *Apostolyuk V. A.* Coriolis Vibratory Gyroscopes in Control Systems // Proc. of the IX Int. Conference “Avia-2009”, vol. 2, 2009, pp. 9.1-9.4.
3. *Apostolyuk V. A.* Theory and Design of Micromechanical Vibratory Gyroscopes // MEMS/NEMS Handbook (Ed: Cornelius T. Leondes), Springer, 2006, Vol.1, Chapter 6, pp. 173-195.

УДК 586.383

О. В. Збруцький, С. П. Маляров, Т. В. Стеценко

СИНТЕЗ БАГАТОВИМІРНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ З СИМЕТРІЄЮ

Вступ

Синтез багатоканальних систем керування та стабілізації становить складну задачу, головною проблемою якого є забезпечення незалежності каналів [1]. Проте універсальні алгоритми досягнення незалежності каналів для довільних систем відсутні. Це зумовлює потребу розробки алгоритмів синтезу для кожного з нових випадків. Часто взаємним впливом каналів нехтують для спрощення алгоритму синтезу [2, 3]. В той же час методи синтезу одновимірних систем набули досконалого розвитку та застосування і дозволяють проектувати такі системи для більшості вимог [1, 2].

Постановка задачі

В гіроскопічних системах керування та стабілізації взаємозв'язок між каналами присутній, як правило, не в об'єкті керування [1], а в регуляторі, який містить дво – чи трьоступеневий гіроскопічний сенсор або силовий пристрій [2, 3]. Нехтування такими зв'язками завжди приводить до неповного врахування властивостей системи при синтезі керування і, як наслідок, до неадекватності синтезованої системи. В той же час такі системи можуть мати певну динамічну симетрію, яка дозволяє математично «згорнути» їх до меншої розмірності [4]. Покажемо можливість використання динамічної симетрії системи керування для формального зменшення її розмірності з метою застосування при синтезі керування методів синтезу одновимірних систем.

Математична модель системи та її редукція

Розглянемо задачу синтезу системи керування на прикладі індикаторного двохступеневого гіроскопічного стабілізатора, чутливим елементом якого є динамічно настроюваний гіроскоп [4]. Вважаємо, що динамічні параметри об'єкта керування — платформи відносно осей її підвісу однакові (це може бути досягнуто точно або наближено). Запишемо її рівняння руху з моментами керування, що формуються за вихідними сигналами гіроскопа, у вигляді

$$I_x\dot{\omega}_x + f_x\omega_x = M_{nx} + W\alpha,$$
$$I_y\dot{\omega}_y + f_y\omega_y = M_{ny} + W\beta, \qquad (1)$$

а рівняння динамічно настроюваного гіроскопа [4]

$$B\ddot{\alpha} - H\dot{\beta} + k(\dot{\alpha} - \dot{\gamma}) + \Delta c\alpha = -B\dot{\omega}_x + H_1\omega_y + M_{Гx},$$
$$B\ddot{\beta} + H\dot{\alpha} + k(\dot{\beta} - \dot{\gamma}\alpha) + \Delta c\beta = -B\dot{\omega}_y - H_1\omega_x + M_{Гy}, \qquad (2)$$

де позначено: θ_x, θ_y, ω_x, ω_y – кути та кутові швидкості повороту платформи навколо осей її підвісу, $\theta = \int\omega dt$; α, β – кути повороту ротора гіроскопа відносно платформи; $I_x=I_y=I$, B – моменти інерції платформи та гіроскопа, $f_x=f_y=f$, k – коефіцієнти моментів сил вязкого опору відповідно платформи та гіроскопа, M — моменти, що діють по осях підвісу платформи (M_n) та ротора гіроскопа $(M_г)$; H, H_1 – кінетичні моменти гіроскопа, Δc - динамічна жорсткість підвісу гіроскопа, W — інтегрально – диференціальний оператор.

Введемо комплексні змінні та моменти $\varphi = \alpha + i\beta$, $\theta = \theta_x + i\theta_y$, $\Omega = \omega_x + i\omega_y$, $M = M_x + iM_y$, де i – уявна одиниця та зведемо системи рівнянь (1) та (2) до двох рівнянь

$$I\dot{\Omega} + f\Omega = M_n + W\varphi,$$
$$B\ddot{\varphi} + (k + iH)\dot{\varphi} + (\Delta c + k\dot{\gamma})\varphi = -B\dot{\Omega} - iH_1\Omega + M_Г \qquad (3)$$

Таким чином, двовимірна система зведена математично до одновимірної для комплексних змінних Ω та φ.

Введемо відповідно до (3) передаточні функції гіроскопа та платформи

$$W_Г = \frac{1}{B(s + n_1 - i\omega_1)(s + n_2 + i\omega_2)}, \quad W_П = \frac{1}{Is + f},$$

в яких позначено $n_1 = n_2 = k/B$, $\omega_1 H = \Delta c$, $\omega_2 B = H$, ω_j — частоти вільних коливань гіроскопа, s — оператор Лапласа. Тоді структурна схема двовимірної системи керування може бути зображена, як показано на рисунку. В гіроскопічних системах стабілізації керування здійснюється, як правило, через гіроскоп формуванням необхідного сигналу керування $M_к$, відповідно якому до гіроскопа прикладається момент $M_г$ та викликається програмний рух гіроскопа.

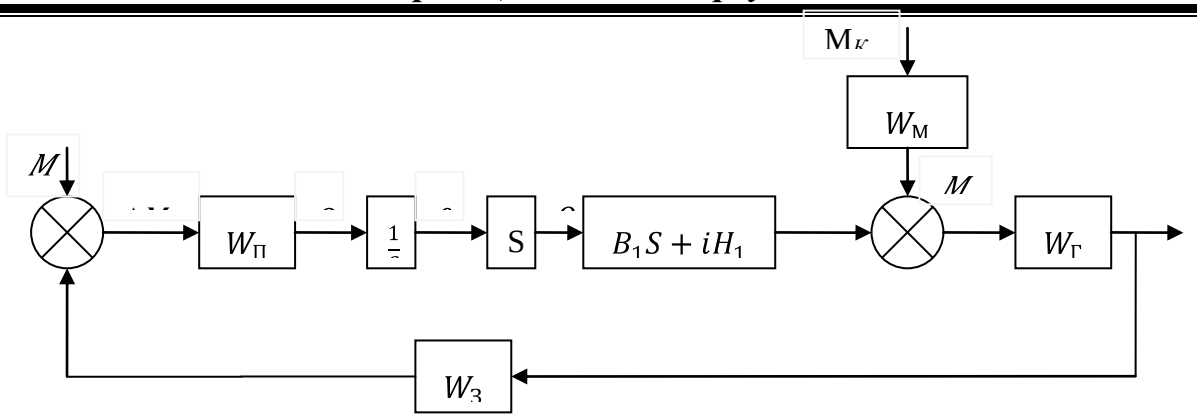


Рис. Структурна схема системи

Синтез системи керування

Синтез керування системи стабілізації повинен забезпечити однозначну залежність керованої змінної (кожного з кутів повороту платформи θ) і сигналу керування (одного з моментів керування $M_к$, чи одного з моментів гіроскопа $M_г$), та забезпечення мінімальної похибки стабілізації (ΔM чи θ) при дії на платформу збурюючих моментів M_n. Перша задача означає відсутність взаємозв'язку між каналами керування. Необхідною умовою вирішення цієї задачі, як видно з диференціальних рівнянь руху (1) та (2), є формування передатної функції системи (3) (див. рис.) за сигналом керування, яка була б некомплексною функцією - дійсною, або уявною. При цьому одночасно повинна виконуватись вимога щодо якості керування. Друга задача традиційно полягає у виборі чи формуванні параметрів контуру керування з умови необхідної точності в заданому частотному діапазоні зміни збурюючих впливів. Розглянемо першу задачу. З структурної схеми системи (див. рис.) знайдемо структуру передаточної функції системи за сигналом керування $M_к$

$$\Phi^{\theta}_{мк} = \frac{1}{s} \cdot \frac{W_M W_Г W_П W}{1 + (Bs + iH_1) W_Г W_П W}. \qquad (4)$$

Для задоволення вимоги некомплексності функції (4) достатньо вибрати передаточну функцію ланки зворотного зв’язку у вигляді

$$W = \frac{W_к}{(Bs + iH_1) W_Г}; W_м = Bs + iH_1 = B(s + i\omega_2), \qquad (5)$$

де поліном $W_к$ повинен бути синтезований. Та наявність в передаточній функції W (5) коливальної ланки без затухання приводить до незадовільної якості перехідних процесів через знаходження системи на межі коливальної стійкості. Для уникнення цього виберемо передаточні функції (5) у вигляді

$$W = \frac{W_к}{W_Г W_м}, W_м = B(s + i\omega_2 + n_2). \tag{6}$$

Тоді отримаємо для передаточної функції (4) за сигналом керування

$$\Phi^{\theta}_{мк} = \frac{1}{s} \cdot \frac{(s + i\omega_2 + n_2) W_K W_П}{n_2 + (s + i\omega_2)(1 + W_K W_П)} \tag{7}$$

та по моменту, що діє на гіроскоп

$$\Phi^{\theta}_{мк} = \frac{1}{s} \cdot \frac{W_K W_П}{n_2 + (s + i\omega_2)(1 + W_K W_П)}. \tag{8}$$

Передаточна функція системи за збурюючим моментом, що діє на платформу, матиме вигляд

$$\Phi^{\theta}_{мк} = \frac{1}{s} \cdot \frac{W_П}{1 + W_K W_П (Bs + iH_1) W_M^{-1}}. \tag{9}$$

Знайдемо структуру передаточної функції $W_к$ для забезпечення якості керування та точності системи при дії збурень. З передаточної функції (9) по збуренню неважко бачити, що для забезпечення астатизму системи за збурюючим моментом M_n платформи доцільно взяти

$$W_K = \frac{1}{s^2} W_{K1}. \tag{10}$$

В [5] показано, що оптимальна якість керування в системі з передаточними функціями вигляду (7) – (10) може бути досягнута шляхом застосування в законі керування поліномів $W_{к1}$ другого та третього порядків. Для досягнення гарантованої точності системи при збуреннях [6] мінімальний ступінь поліному $W_{к1}$ повинен дорівнювати третьом. Приймемо

$$W_{K1} = KG_1(s), G_1(s) = K_0 + K_1 s + K_2 s^2 + K_3 s^3. \tag{11}$$

Тоді передаточні функції (7) – (9) будуть

$$\Phi^{\theta}_{мк} = \frac{1}{s} \cdot \frac{W_{K1}(s + i\omega_2 + n_2)}{G(s)(s + i\omega_2) + n_2(Is + f)s^2}, \Phi^{\theta}_{мг} = \frac{1}{s} \cdot \frac{W_{K1}}{G(s)(s + i\omega_2) + n_2(Is + f)s^2},$$

$$\Phi^{\theta}_{мп} = s \cdot \frac{s + i\omega_2 + n_2}{G(s)(s + i\omega_2) + n_2(Is + f)s^2},$$

$$G(s) = (K_3 K + I)s^3 + (K_2 K + f)s^2 + KK_1 s + KK_0. \tag{12}$$

Коефіцієнти K_j (j=0...3) поліному (12) можуть бути знайдені шляхом оптимізації вибраного функціоналу якості відповідно до вимог системи керу-

вання [1,6]. Забезпечуючи значення коефіцієнтів K_j зворотного зв'язку такими, що значно переважають параметри I та f платформи, отримаємо

$$G(s) = KG_1(s), \tag{13}$$

а приймаючи до уваги малість коефіцієнта n_2 сил вязкого опору в гіроскопі, знайдемо наближені вирази передаточних функцій (12) системи

$$\Phi^{\theta}_{мк} = \frac{1}{s}, \qquad \Phi^{\theta}_{мп} = \frac{s}{KG_1(s)}. \tag{14}$$

Структура передаточної функції (13), (14) системи за збурюючим моментом дозволяє вибрати постійне значення коефіцієнта K зворотного зв'язку, виходячи з умови забезпечення необхідної точності $\theta_{доп}$ системи стабілізації в умовах хитавиці основи

$$\Omega_{ос}=\Omega_o \sin\lambda t,$$

на якій встановлена стабілізована платформа, на певній частоті λ хитавиці [2, 3]. При максимальному значенні моменту $M_{то}$ сил сухого тертя, що діє по осях підвісу платформи, виконавши гармонічну лінеаризацію моментів сил тертя, з (14) отримаємо

$$K \geq= \frac{4\lambda M_{то}}{\pi\theta_{доп}\left|G_1(\lambda)\right|}. \tag{15}$$

Для статичної системи стабілізації за збурюючим моментом M_n платформи будемо мати

$$W_K = \frac{1}{s}W_{K2}. \tag{16}$$

Можливість гарантування точності системи в цьому випадку буде забезпечена вибором передаточної функції алгоритму керування

$$W_{к2} = K(K_0 + K_1 s + K_2 s^2) = KG_2(s). \tag{17}$$

Тоді передаточні функції системи будуть

$$\Phi^{\theta}_{мк} = \frac{1}{s}\cdot\frac{(s+i\omega_2+n_2)W_{K2}}{(s+i\omega_2)G(s)+n_2 s(Is+f)}, \Phi^{\theta}_{мг} = \frac{1}{s}\cdot\frac{W_{K2}}{(s+i\omega_2)G(s)+n_2 s(Is+f)},$$

$$\Phi^{\theta}_{мп} = \frac{s+i\omega_2+n_2}{(s+i\omega_2)G(s)+n_2 s(Is+f)},$$
$$G(s) = (I+K_2K)s^2 + (f+KK_1)s + KK_0. \tag{18}$$

Якщо коефіцієнти K_j зворотного зв'язку значно переважають параметри I та f платформи, та при малому значенні коефіцієнта n_2 сил в'язкого опору в гіроскопі отримаємо

$$G(s) = KG_2(s), \qquad \Phi^{\theta}_{мк} = \frac{1}{s}, \Phi^{\theta}_{мп} = \frac{1}{KG_2(s)}. \tag{19}$$

У випадку постійного значення коефіцієнта K зворотного зв'язку він може бути знайдений аналогічно (15) з умови забезпечення точності системи при заданому збуренні та визначається з умови

$$K \geq \frac{4M_{TO}}{\pi\theta_{доп}\left|G_2(\lambda)\right|}. \tag{20}$$

Гарантовану точність системи керування можна забезпечити при довільних збуреннях, використовуючи отриману структуру керування (10), (11), або (16), (17) та можливість настроювати коефіцієнт K (12), (14), (19) відповідно до діючих збурень в адаптивній системі [6].

Висновки

Показана можливість редукції двомірної системи до одновимірної використанням її симетрії та введенням комплексної змінної. Отримана умова незалежності каналів керування, яка полягає в некомплексності передаточної функції системи керування. Застосування редукції системи дозволяє синтезувати закон керування, використовуючи методи синтезу одновимірних систем. Показаний підхід до вибору структури алгоритму оптимального керування з можливістю одночасного забезпечення нечутливості системи до зовнішніх збурень та забезпечення необхідної її точності.

Список використаної літератури

1. *Методы* классической и современной теории автоматического управления. Под ред. Н. Д. Егупова. Т.2. Синтез регуляторов и теория оптимальных систем автоматического управления. – М.: МГТУ им. Баумана, 2000.–748с.
2. *Александров А. Д.* и др. Индикаторные гироскопические платформы. – М.: Машиностроение, 1979. – 366с.
3. *Пельпор Д. С., Матвеев В. А., Фатеев В. В.* Гироскопические стабилизаторы на динамически настраиваемых вибрационных гироскопах. – М.: МВТУ им. Баумана, 1985.– 62с.
4. *Збруцький О. В., Маляров С. П.* Двовимірний датчик кутової швидкості на симетричному трьох степеневому гіроскопі//Механіка гіроскопічних систем. – Наук. – техн. збірник.–2009.–№20.–С.5–12.
5. *Прач А. А., Маляров С. П.* Выбор структуры сенсорного измерительного модуля оптимальной системы стабилизации//Механіка гіроскопічних систем. – Наук. – техн. збірник.–2008.–№19.–С.183–189.

6. *Збруцкий А. В., Прач А. А.* Обеспечение точности программного управления в условиях произвольных возмущений//Системи керування, навігації та зв'язку.–2007.–Вип.3.– С. 48–54.

УДК: 681.3+615.89

О.М. Мелащенко, Л.М. Рижков, Фам Ба Кхань

МАГНІТНО-МАХОВИЧНЕ КЕРУВАННЯ МІКРОСУПУТНИКОМ

Вступ

Найчастіше в мікросупутниках (МС) в якості виконавчих органів системи орієнтації і стабілізації (СОС) використовуються магнітні котушки (МК). Ці пристрої задовольняють майже всім вимогам, які ставляться до бортового обладнання МС – вони мають малі габарити, масу, енергоспоживання і високу надійність. Головним недоліком МК, як виконавчих пристроїв СОС, є їхня нездатність забезпечити прецизійну точність орієнтації. Тому останнім часом намітилася тенденція доповнювати СОС МС двигунами-маховиками (ДМ), яскравим прикладом чого може бути маховична СОС пікосупутника Beesat [1].

Питанням маховичного керування космічними апаратами, так само як і питанням керування ними МК, приділено чималу увагу [2-6]. Однак, в літературі залишилося майже нерозглянутим питання спільного керування орієнтацією за допомогою МК і ДМ. Хоча достатньо очевидно, що спільна дія різних за фізичними принципами виконавчих органів повинна дати нову якість функціонування СОС МС.

Постановка задачі

Розглядається питання побудови і аналізу алгоритму керування кутовим рухом МС з формуванням керуючого моменту на основі взаємодії ДМ і МК. Ставиться задача пошуку співвідношення між внесками окремих складових в загальному моменті керування МС для підвищення ефективності керування його орієнтацією.

Модель кутового руху МС з ДМ і МК

Модель кутового руху МС з встановленими на його облавку ДМ і МК отримаємо, взявши за основу модель, наведену в [7]:

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}}_{BI}^{B} + \boldsymbol{\omega}_{BI}^{B} \times \left(J\boldsymbol{\omega}_{BI}^{B} \right) = \boldsymbol{\tau}_{g}^{B} + \boldsymbol{\tau}_{RW}^{B} + \boldsymbol{\tau}_{m}^{B} + \boldsymbol{\tau}_{d}^{B},$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \circ \left(0, \; \boldsymbol{\omega}_{BO}^{B} \right)^{T}, \tag{1}$$

де $J = \mathrm{diag}(I_x, I_y, I_z)$ – тензор інерції МС; $\mathbf{q}$ – кватерніон, яким описується кутовий рух МС відносно орбітальної системи координат; ω_{BI}^{B} – вектор абсолютної кутової швидкості МС, виражений в зв'язаній системі координат; $\boldsymbol{\omega}_{BO}^{B} = \boldsymbol{\omega}_{BI}^{B} - R_{O}^{B}\boldsymbol{\omega}_{OI}^{O}$ – вектор кутової швидкості МС відносно орбітальної системи координат; $\tau_{g}^{B} = 3\omega_0^2 \boldsymbol{c}_3 \times J\boldsymbol{c}_3$ – гравітаційний момент; $\tau_{RW}^{B} = \dot{h} + \omega_{BI}^{B} \times h$ – вектор моменту, який прикладається ДМ до МС, причому $\boldsymbol{h}$ – вектор кінетичного моменту ДМ; $\boldsymbol{\tau}_{m}^{B} = \boldsymbol{\mu}^{B} \times \boldsymbol{B}^{B}$ – момент керування, який формується МК (тут $\boldsymbol{\mu}^{B}$ – магнітний момент котушок і $\boldsymbol{B}^{B}$ - вектор індукції магнітного поля Землі в зв'язаній системі координат), $\boldsymbol{\tau}_{d}^{B}$ - момент збурення; $\circ$ – знак кватерніонного множення.

Алгоритм магнітно-маховичного керування МС

Для отримання алгоритму магнітно-маховичного керування МС розглянемо окремо алгоритми маховичного та магнітного керування.

За припущенням про доступність для побудови зворотного зв'язку векторів кутової швидкості МС і кватерніону орієнтації, алгоритм керування ДМ формується у вигляді:

$$\dot{\mathbf{h}} = \boldsymbol{\omega}_{BI}^{B} \times \left(J\boldsymbol{\omega}_{BI}^{B} \right) - \boldsymbol{\omega}_{BI}^{B} \times \mathbf{h} - K_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{BO}^{B} - K_{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2}$$

де члени $\boldsymbol{\omega}_{BI}^{B} \times \left(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}_{BI}^{B} \right)$ та $-\boldsymbol{\omega}_{BI}^{B} \times \boldsymbol{h}$ призначені для компенсації гіроскопічних моментів, а вибором діагональних матриць K_{ω} і K_{ε} визначається динаміка замкненої системи. В [2] ці матриці запропоновано брати у вигляді: $K_{\omega} = dJ$, $K_{\varepsilon} = kJ$, де скаляри $d > 0$ та $k > 0$ вибираються так, щоб рух МС навколо осі миттєвого повороту відбувався згідно розв'язку наступного рівняння:

$$\ddot{\phi} + d\dot{\phi} + k\phi = 0. \tag{3}$$

Коефіцієнт демпфування ς та власна частота ω_n цього рівняння визначаються згідно виразів: $d = 2\zeta\omega_n, k = \omega_n^2$. Шляхом вибору власної частоти та коефіцієнта демпфування ланки (3) можна змінювати характер руху МС навколо осі миттєвого повороту.

Алгоритм енергетичного регулятора, який забезпечує МС асимптотичну стійкість в орбітальній системі координат, записується у вигляді [8]:

$$\boldsymbol{\mu}^B = L_\omega \boldsymbol{\omega}_{BO}^B \times \boldsymbol{B}^B + L_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{B}^B, \qquad (4)$$

де $\boldsymbol{\varepsilon}$ – векторна частина кватерніону орієнтації $\mathbf{q}$; L_ω, L_ε – коефіцієнти, які уточнюються при побудові СОС.

З метою підвищення точності, зменшення енерговитрат, а також спрощення алгоритму функціювання магнітно-маховичної СОС пропонується для уникнення необхідності розвантажування ДМ виключити стан насичення ДМ шляхом додавання інтегральної складової від позиційних координат в сигнал зворотного зв'язку, який формується МК. Вважаючи, що для керування доступний повний фазовий вектор МС, момент керування, який прикладається до МС в цьому випадку запишеться у вигляді:

$$\boldsymbol{\tau}_{control}^B = -K_\omega \boldsymbol{\omega}_{BO}^B - K_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} + L_\omega \boldsymbol{\omega}_{BO}^B \times \boldsymbol{B}^B + L_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{B}^B + L_I \int \boldsymbol{\varepsilon} dt \times \boldsymbol{B}^B \times \boldsymbol{B}^B, \qquad (5)$$

де L_I – коефіцієнт інтегруючої ланки енергетичного регулятора.

Характерна особливість запропонованого алгоритму магнітно-маховичного керування полягає у відсутності членів компенсації перехресних зв'язків в замкненій СОС, зумовлених гіроскопічними моментами. Завдяки цьому знижуються вимоги до точності оцінювання (або вимірювання, за встановлених на облавку датчиків кутової швидкості) вектора $\boldsymbol{\omega}_{BI}^B$ абсолютної кутової швидкості МС.

Числовий аналіз алгоритму магнітно-маховичного керування

Виконаємо числовий аналіз СОС з описаним вище алгоритмом магнітно-маховичного керування для МС з тензором інерції $J = \mathrm{diag}\ [0{,}34\ \ 0{,}34\ \ 0{,}31]$ [кг·м^2]., який рухається по коловій орбіті на висоті 650км з нахилом орбіти, рівним 98°. В якості моделі магнітного поля Землі візьмемо модель WMM2005 [9]. При моделюванні вважатимемо, що на МС діє сталий збурюючий момент вигляду $\boldsymbol{\tau}_d^B = [1\ \ 2\ \ -2]^{\mathrm{T}} \cdot 10^{-7}$ [Н·м].

На рис. 1 і рис. 2 наведено графіки зміни кутів орієнтації і кінетичних моментів ДМ за побудови СОС МС на основі алгоритму (5) при $\zeta = 1/\sqrt{2}$, $\omega_n = 0{,}01\ c^{-1}$, $L_\omega = L_\varepsilon = L_I \equiv 0$ і при задані початкових умов у вигляді: $\boldsymbol{\omega}_{OB}^B = \mathbf{0}$, $\varphi, \theta, \psi = [-20^\circ, 10^\circ, 20^\circ]$.

З графіків на рис. 1 видно, що за відсутності в законі зворотного зв'язку членів компенсації гіроскопічного моменту по кутам крену і нікання виникає періодичний рух. А з графіків на рис. 2 видно, що при дії на МС сталого збурюючого моменту і відсутності в керуючому моменті маг-

нітної складової відбувається наростання кінетичного моменту ДМ, яке є особливо інтенсивним по каналу тангажу.

Проаналізуємо динаміку СОС з повним алгоритмом магнітно-маховичного керування при $L_\omega = 10^7$, $L_\varepsilon = 10^5$, $L_I \equiv 10^3$. Для цього випадку на рис. 3 побудовано графіки зміни кутів орієнтації МС, а на рис. 4 – графіки зміни кінетичних моментів ДМ.

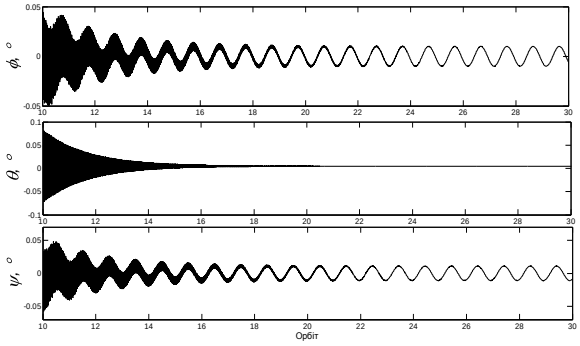


Рис. 1. Графіки зміни кутів орієнтації за відсутності магнітного керування

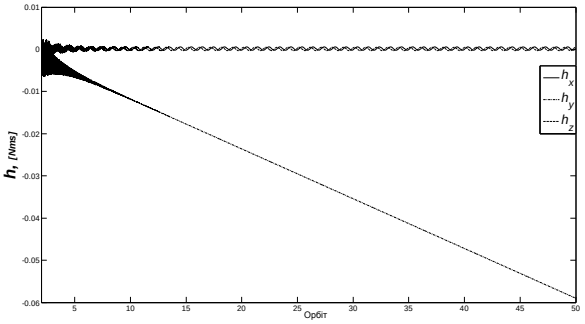


Рис. 2. Графіки зміни кінетичних моментів ДМ за відсутності магнітного керування

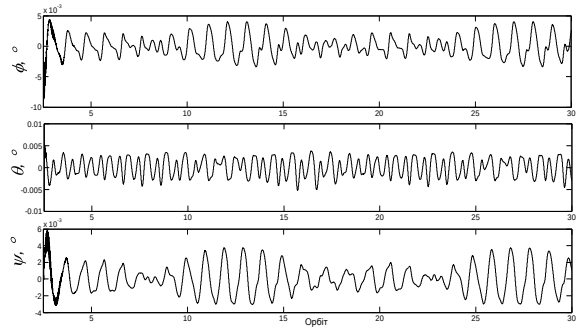


Рис. 3. Графіки зміни кутів орієнтації МС за магнітно-маховичного керування

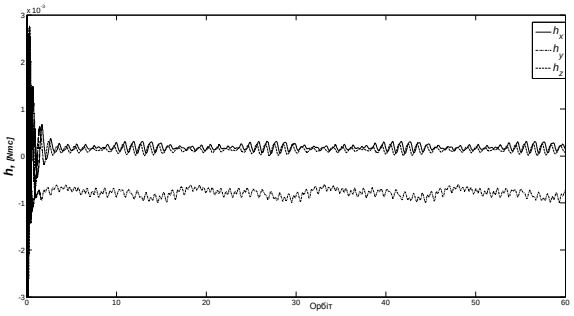


Рис. 4. Графіки зміни кінетичних моментів ДМ за магнітно-маховичного керування

Як видно з графіків на рис. 3, при взаємодії ДМ і МК досягнута похибка орієнтації МС не перевищує $0{,}005^\circ$. З графіків на рис. 4 видно, що запропонований алгоритм спільного магнітно-маховичного керування дозволяє уникнути входження ДМ в насичення при дії на МС сталого збурюючого моменту.

З метою з'ясування впливу на поведінку МС інтегруючої складової в алгоритмі (5) на рис. 5 побудовано графіки зміни кінетичних моментів ДМ при $L_I \equiv 10^2$.

Як видно з графіків на рис. 5, зменшення коефіцієнту інтегруючої ланки алгоритму магнітно-маховичного керування призводить до збільшення величини усталеного значення кінетичного моменту ДМ, встановленого по осі тангажу.

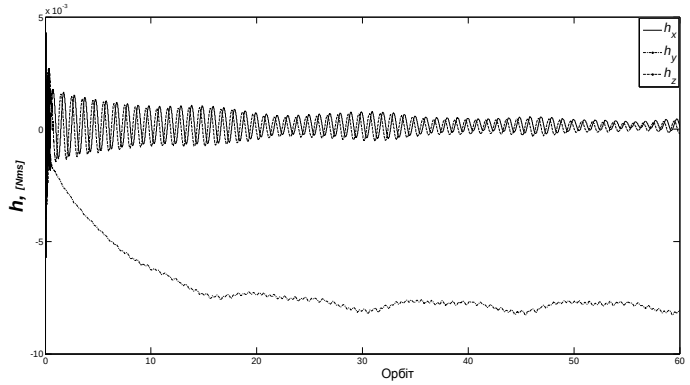


Рис. 5. Графіки зміни кінетичних моментів ДМ за магнітно–маховичного керування при $L_I \equiv 10^2$.

Висновки

Запропонований в статті алгоритм спільного магнітно-маховичного керування дозволив значно підвищити точність орієнтації МС порівняно з точністю, яка досягається при роздільному керуванні МК і ДМ за неточних оцінок вектора абсолютної кутової швидкості МС. Крім того, запропонований алгоритм дозволив уникнути входження ДМ в насичення, що дає можливість спростити практичну реалізацію системи керування орієнтацією МС.

Напрямком подальших досліджень в контексті побудови алгоритмів спільного магнітно-маховичного керування орієнтацією МС може бути пошук регулярних алгоритмів знаходження коефіцієнтів маховичної та магнітної складових алгоритму керування, які б дозволяли оптимізувати замкнену систему згідно вибраного критерію якості.

Список використаної літератури

1. http://server02.fb12.tu-berlin.de/rft/beesat/BeeSat/About_BeeSat.html.
2. *Уэйс Б. Х., Эрэпостатис Э.* Управление поворотами космического аппарата вокруг собственной оси с обратной связью по компонентам кватерниона // Аэрокосмическая техника. – 1990. – № 3. – С. 3-11.

3. *Каррингтон К. К., Джанкинс Дж. Л.* . Оптимальное управление маневрами переориентации космического аппарата при нелинейной обратной связи // Аэрокосмическая техника. – 1986. – № 8. – С. 143-153.
4. *Коваленко А.П.* Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1975.– 247 с.
5. *M. Lovera and A. Astolfi*. Spacecraft attitude control using magnetic actuators // Automatica. – 2004. – Vol. 40, P. 1405–1414.
6. *Мелащенко О. М., Рижков Л. М.* Синтез гравітаційно-магнітної системи стабілізації мікросупутника // Механіка гіроскопічних систем. – 2008. – Вип. 19. – С. 76-86.
7. *Мелащенко О. М., Рижков Л. М.* Оптимізація магнітної системи стабілізації мікросупутника за змішаним H_2 / H_∞ критерієм // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 89-93.
8. *Wisniewski R.* Satellite attitude control using only electromagnetic actuation // Ph.D. thesis, Aalborg University: Department of Control Engineering, December. – 1996. – 150 p.
9. http://www.ngdc.noaa.gov/seg/WMM/DoDWMM.shtml.

УДК 531.383.25

С. В. Морозов, К .В. Тохтамишева

ФОРМУВАННЯ ЗАДАЧІ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ ПОВІТРЯНОГО СУДНА НА ЕТАПІ ЗАХОДУ НА ПОСАДКУ З ДОВІЛЬНИМ КУТОМ ПІДХОДУ ДО ЗЛІТНО-ПОСАДОЧНОЇ СМУГИ

Вступ

В наш час керування літаком на режимах зльоту і посадки є однією з найбільш складних задач. Близькість землі потребує точності керування та стабілізації кутових і траєкторних параметрів.

Статистика свідчить, що значна частина авіаційних випадків та інцидентів є наслідком прийняття неправильного рішення заходу на посадку замість уходу на друге коло або уходу на запасний аеродром [1].

Аналіз причин авіаційних випадків або інцидентів показує, що рішення, які призвели до катастрофічних наслідків, як правило, приймались в умовах гострого дефіциту часу при далеко неповній та неточній вихідній інформації в умовах граничного завантаження командира повітряного судна (екіпажу).

При заході на посадку в складних метеоумовах продивляється тільки початок злітно-посадочної смуги (ЗПС). Тому пілот в таких умовах не завжди може достатньо точно визначити своє просторове положення відносно ЗПС. В результаті кінцеве рішення на посадку приймається в умовах стійкої видимості ЗПС.

Через складність спостереження ЗПС в дощ, снігопад, туман та виникнення різних зорових спотворень багато авіаційних випадків відбулося в ой момент, коли пілот (екіпаж), спробувавши встановити візуальний контакт із землею, знижувався нижче висоти прийняття рішень (ВПР), приймаючи неправильне рішення виконати посадку в умовах, до яких він не був підготовлений.

Мета роботи

Метою роботи є формулювання і розробка контуру автоматичного керування боковим рухом повітряного судна, який дозволив би визначити такий кут підходу до злітно-посадочної смуги в залежності від дальності до ЗПС та лінійного бокового відхилення від курсової лінії, щоб літак ввійшов в курсову зону з відхиленням не більше $\varepsilon_K = \pm 3^\circ$ без перерегулювання. Це дозволить звільнити командира літального апарату від прийняття рішення.

Постановка задачі

При заході на посадку для забезпечення польоту в заданому коридорі повітряного простору необхідно витримувати шляховий кут відносно курсу ЗПС. Даний кут знаходиться в діапазоні $\Psi_M = 28 \div 65^\circ$, який необхідно витримувати на початковому етапі виходу на курсову зону до входу в лінійну зону зміни сигналу ε_K, де $\varepsilon_K = \pm 3^\circ$.

Якщо заданий магнітний шляховий кут Ψ_M перевищує 65°, то при ввімкненні автоматичного заходу на посадку з великим боковим відхиленням від осі ЗПС ($Z > 4 \div 5$ км) літак під дією системи автоматичного керування (САК) виконує розворот та виходить на курс 65°, а потім при вході в лінійну зону зміни сигналу ε_K виконує доворот на вісь ЗПС.

Якщо заданий магнітний шляховий кут менше 28°, літак під дією САК виходить на кут 28°. Далі виконує маневр довороту на вісь ЗПС.

При моделюванні приймемо наступні початкові умови:

- лінійне бокове відхилення літака від курсової лінії $Z_0 = 1000 \div 3000$ м;
- дальність до ЗПС $X_0 = 10000 \div 20000$ м;
- кут відхилення закрилків $\delta_{закр} = 0 \div 28^\circ$.

Необхідно розробити систему, що забезпечуватиме вихід на курсову зону та стабілізацію на ній із заданою точністю.

Зміст роботи

Траєкторія заходу на посадку формується рівно сигнальними зонами курсового (КРМ) та глісадного (ГРМ) радіомаяків [2].

Антена КРМ формує двопелюсткову діаграму спрямованості, яка перетинається в площині посадкового курсу. В одній пелюстці несуча частота промодельована частотою 150 Гц, а в іншій – 90 Гц. У площині посадкового курсу глибина модуляції обох пелюсток однакова, а при відхилені від лінії курсу (осі ЗПС) переважає та чи інша частота залежно від напрямку відхилення літака. Курсовий радіоприймач, встановлений на борті літака, виділяє частоти модуляції 90 і 150 Гц і порівнює глибину модуляції обох сигналів. Різниця глибин модуляції (РГМ) несе в собі інформацію про величину ε_K – відхилення літака від рівно сигнальної зони курсового радіомаяку (КРМ) (рис. 1).

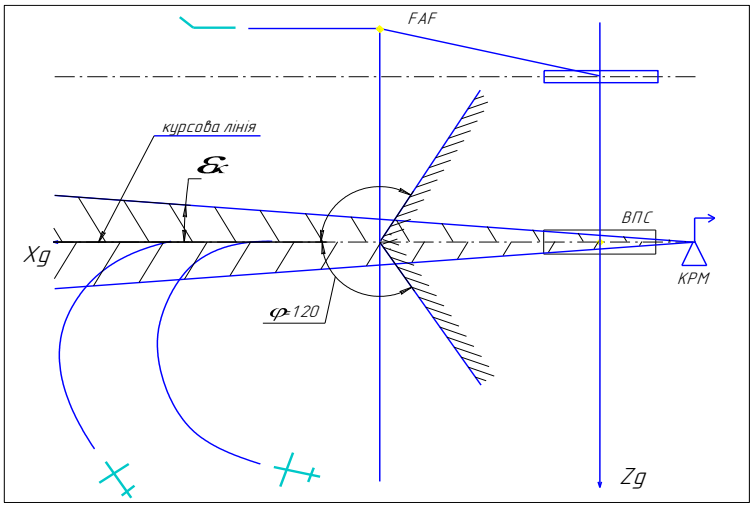


Рис. 1. Схема заходу на посадку повітряного судна з довільним кутом підходу до ЗПС

На рис. 1 позначені:

$$\varphi = \Psi_M - \Psi_{ЗПС},$$

де Ψ_M – магнітний шляховий кут,

$\Psi_{ЗПС}$ – магнітний курс ЗПС.

В загальному випадку магнітний курс ЗПС становить: $\Psi_{ЗПС} = 90^\circ$,

$$\Psi_M = \psi + \delta_M + \beta_{сн}.$$

Приймаємо, що $\delta_M = 0$, тоді

$$\Psi_M = \psi + \beta_{сн},$$

де $\beta_{сн}$ – кут зносу, який визначається за формулою: $\beta_{сн} = tg\dfrac{U_z}{V}$.

Внаслідок наявності у літака площини симетрії і припущення, що в межах плавного обтікання його повітряним потоком зміни параметрів бокового руху практично не викликають змін параметрів поздовжнього руху, як зміни параметрів поздовжнього руху не виявляють суттєвого впливу на параметри бокового руху, виникає можливість окремого вивчення руху літака у поздовжній та боковій площинах.

При синтезі контурів керування в режимі заходу на посадку звичайно використовуються лінійні математичні моделі руху літака. Це обумовлено тим, що відхилення від незбуреного, або номінального руху в режимі заходу на посадку достатньо малі [3]. Хоча кут атаки при заході на посадку наближається до критичного значення, він все ж залишається в межах майже лінійної ділянки характеристики залежності коефіцієнту підйомної сили від кута атаки.

В роботі використано математичну модель руху літака в траєкторній системі координат, в якій враховано вплив вітрових збурень.

При розробці моделі руху у боковій площині параметри руху у поздовжній площині будемо вважати такими, що дорівнюють балансованим значенням, які розраховані для вихідного режиму горизонтального польоту.

За допомогою комп'ютерної технології «MATLAB» розроблено модель балансування повітряного судна [4].

При початкових умовах: $v = 330$ км/год, $\delta_{лів.закр.} = 0^\circ$, $\delta_{прав.закр.} = 0^\circ$ отримано наступні балансувальні значення:

$$\alpha_{бал} = 11{,}32^\circ,\ \delta_н = 0^\circ,\ \delta_е = 0^\circ.$$

Використані наступні закони автоматичного керування, де коефіцієнти були знайдені методом бажаної логарифмічної амплітудно-частотної характеристики (ЛАЧХ):

$$\delta_е = F_е\left[1.5\frac{1.6p}{1.6p+1}\omega_x + 2\ \ \gamma - \gamma_{зад}\ \right] - \text{автопілот крену},$$

$$\delta_н = F_{\delta_н}\left[2.5\frac{2.5p}{2.5p+1}\omega_y\right] - \text{демпфер рискання},$$

де $F_{\delta_н} = \pm 10^\circ$, $F_{\delta_е} = \pm 12^\circ$ – функції обмеження.

$$\gamma_{зад} = F_\gamma\left[F_\Psi\left(\Psi_{зад} - \Psi\cdot\frac{1}{s+1}\right)\cdot\left(\frac{-1}{s+1}\right)\right],$$

де коефіцієнти були знайдені за допомогою блоку NCD комп'ютерної технології «MATLAB».

У результаті проведеного моделювання зроблено висновок, що при збільшенні величини кута підходу до курсової лінії та зменшенні дальності до ЗПС збільшується період перерегулювання та повітряне судно перелітає курсову зону.

Для усунення даної проблеми використані залежності, за допомогою яких можливо в залежності від дальності літака до ЗПС визначити кращий для точного входу в курсову зону кут відходу до курсу ЗПС (рис. 2).

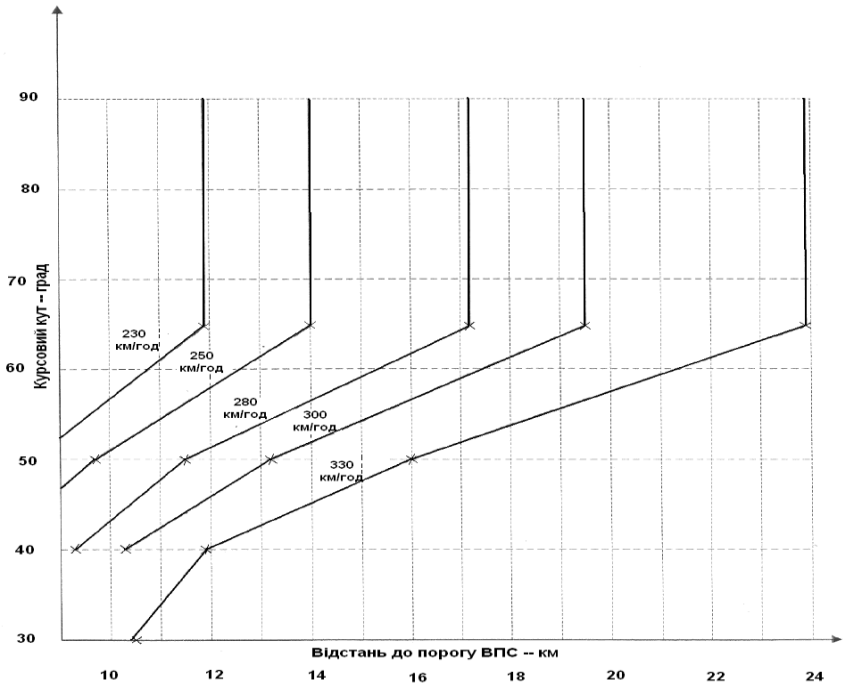


Рис. 2. Залежність кута підходу до курсу ЗПС відносно відстані до порогу ЗПС при перерегулюванні по ε_K 0,05 РГМ

Використання даних залежностей дозволить збільшити точність входу в курсову зону та зменшити демпфування траєкторних коливань повітряного судна відносно рівносигнальної лінії курсу [4].

В результаті моделювання були отримані наведені нижче графіки, які ілюструють поведінку повітряного судна заданої конфігурації в залежності від зміни величини лінійного бокового відхилення літака від курсової лінії Z та дальності до ЗПС X (рис. 3, рис. 4, рис. 5).

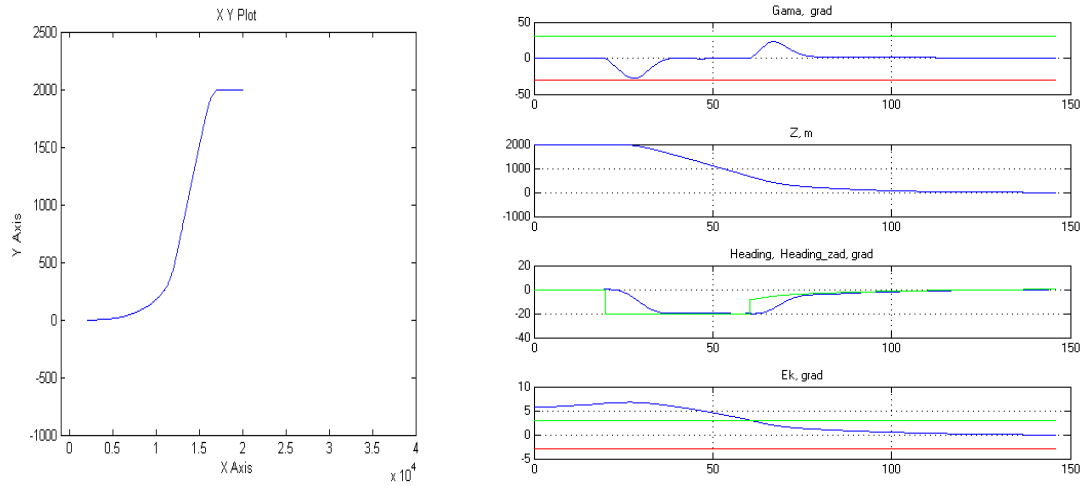


Рис. 3. $Z_0 = 2000$ м, $X_0 = 20000$ м

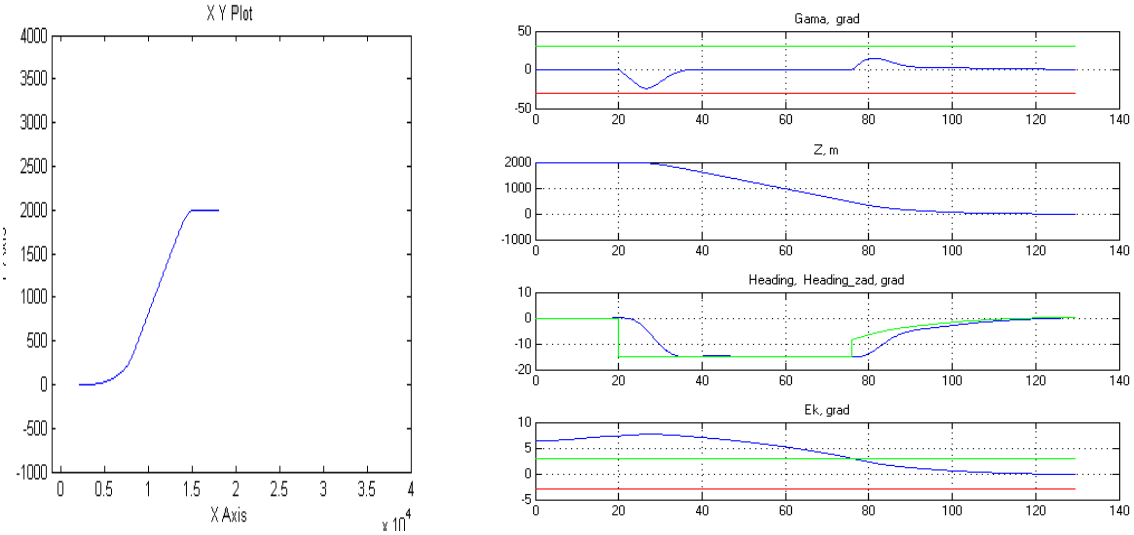


Рис. 4. $Z_0 = 2000$ м, $X_0 = 18000$ м

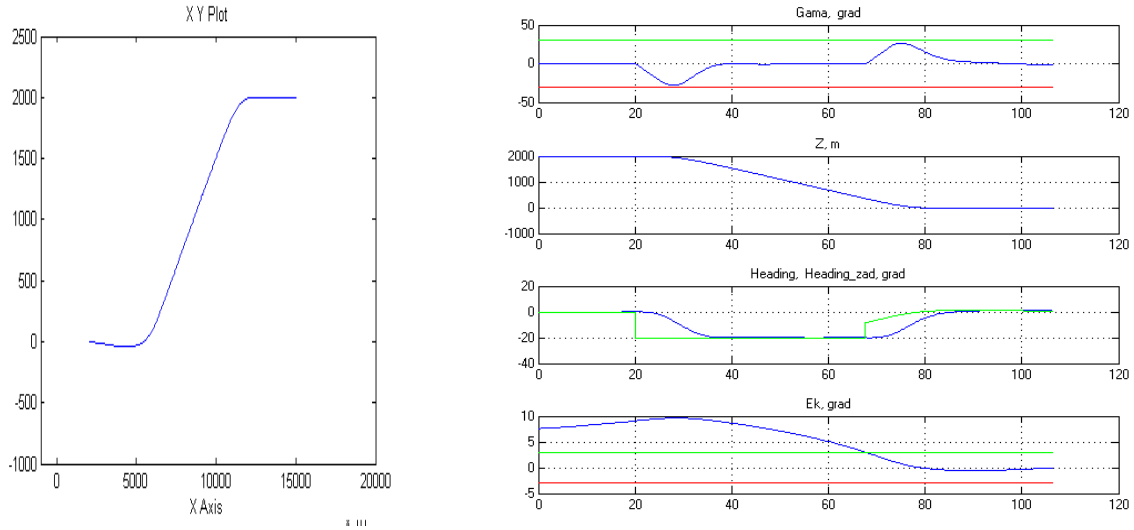


Рис. 5. $Z_0 = 2000$ м, $X_0 = 15000$ м

Висновки

Розроблений контур автоматичного керування повітряного судна на етапі заходу на посадку з довільним кутом підходу до злітно-посадочної смуги дозволяє повітряному судну входити в курсову зону та стабілізуватись в ній із заданою точністю та за досить малий час без залучення пілота, що, в свою чергу, дозволить збільшити точність заходу на посадку на великих швидкостях та знизити «завантаження» повітряного простору.

Список використаної літератури

1. *Белогородский С. Л.* Автоматизация управления посадкой самолета – М.: Транспорт, 1972. – 352 с.
2. *Боднер В. А.* Системы управления летательными аппаратами – М.: Машиностроение, 1973. – 506 с.
3. *Воробьев В. Г., Кузнецов С. В.* Автоматическое управление полетом самолетов – М.: Транспорт, 1995. – 448 с.
4. *Рогожин В. О., Синєглазов В. М., Філяшкін М. К.* Пілотажно-навігаційні комплекси повітряних суден: підручник. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 316 с.

УДК 531.768

М. Г. Черняк

ПОХИБКИ НАВІГАЦІЙНОГО МАЯТНИКОВОГО КОМПЕНСАЦІЙНОГО АКСЕЛЕРОМЕТРА ВІД ДІЇ ПРОСТОРОВИХ ВІБРАЦІЙ ОСНОВИ

Вступ

Навігаційні маятникові компенсаційні акселерометри (НА) є датчиками первинної інформації практично всіх сучасних інерціальних навігаційних систем (ІНС) рухомих об’єктів.

Відомо, що лінійні (ЛВ) та кутові (КВ) вібраційні збурення з боку рухомого об’єкту, як основи на якої встановлено НА, значно погіршують точність його вимірювання, спричиняючи виникнення додаткових систематичних вібраційних похибок (ВП), які залежать від параметрів ЛВ та КВ.

В роботах [1, 2] найбільш повно теоретично розглянуто методичні ВП НА з пружним підвісом (ПП) чутливого елементу (ЧЕ). Однак, ці по-

хибки досліджено лише в умовах дії на НА детермінованих синхронних ЛВ основи, що значно обмежує їх відповідність реальним умовам використання НА на маневрових рухомих об'єктах.

На думку автора, ще не вирішено задачу моделювання вібраційних похибок НА з ПП ЧЕ, які виникають в найбільш загальних умовах просторового вібраційного руху основи з довільним сполученням частот та початкових фаз детермінованих ЛВ та КВ.

Постановка задачі

Метою статті є отримання аналітичних виразів для розрахунку ВП НА з пружним підвісом ЧЕ, які виникають в найбільш загальних умовах просторового (одночасно лінійного та кутового) вібраційного руху основи з довільним сполученням частот та початкових фаз детермінованих ЛВ та КВ.

НА з пружним підвісом ЧЕ як об'єкт дослідження

Сучасні НА з ПП ЧЕ в більшості своїй будуються за компенсаційною функціональною схемою, яку наведено на рис. 1.

В прямому ланцюгу схеми розміщено маятниковий ЧЕ, датчик переміщення (ДП) ЧЕ по інформативним відносним узагальненим координатам та підсилювально–коректуючу ланку (ПКЛ), а в ланцюгу від'ємного зворотного зв'язку (ВЗЗ) – зворотний компенсуючий перетворювач (ЗКП) магнітоелектричного принципу дії [1]. Чутливий елемент містить інерційну масу (ІМ) 1, яка з'єднана з основою 2 акселерометра за допомогою балочного ПП 3. Вісь x_3^0 є вимірювальною віссю (ВВ) акселерометра.

Типова конструкція сучасного НА з кварцовим ПП ЧЕ, яка побудована за розглянутою функціональною схемою, зображена на рис. 2. Ретельний опис цієї конструкції НА міститься в статті [3].

За такою конструкцію побудовані найбільш відомі НА типу QA-2000 ("Hanewvell", США), АК–6, КХ–67 (НВО "Авиаприбор" і ФНВЦ "Корпус", Росія), SRJ–03 (BSN Technology, Китай) та інші.

Вихідна математична модель НА з пружним підвісом ЧЕ

Відповідно до рисунку розглянемо рух ЧЕ НА по інформативним відносним узагальненим координатам α і x, які відповідають напрямам мінімальної жорсткості ПП та максимальної чутливості ДП. Для цього запишемо систему лінеаризованих рівнянь ідеальної роботи НА в умовах просторового руху основи, яка складається з рівнянь руху ЧЕ по координатам α і x у зв'язаній з основою системі координат x_i^0 $(i=\overline{1,3})$:

$$J_{22}\ddot{\alpha}+b_{\alpha}\dot{\alpha}+c_{\alpha}\alpha+ml_c\ddot{x}-c_{23}x=ml_c(w_3+w_1\alpha)-$$
$$-ml_c(\Omega_1^2+\Omega_2^2)x-J_{22}\dot{\Omega}_2+(J_{33}-J_{11})(\Omega_1^2-\Omega_3^2)\alpha+$$
$$+(J_{33}-J_{11})\Omega_1\Omega_3+M_K;$$
$$m\ddot{x}+b_3\dot{x}+c_3x+ml_c\ddot{\alpha}-c_{23}\alpha=mw_3+$$
$$+m(x+l_c\alpha)(\Omega_1^2+\Omega_2^2)-ml_c(\dot{\Omega}_2-\Omega_1\Omega_3)+F_K, \qquad (1)$$

та рівнянь, які описують (з врахуванням електричного демпфірування) роботу контуру ВЗЗ в смузі пропускання НА:

$$F_K=-k_{кп}[k_n(k_{\alpha}\alpha+k_x x)+k_{дм}(k_{\alpha}\dot{\alpha}+k_x\dot{x})];$$
$$M_K=F_K l_F;\ l_F\approx l_c, \qquad (2)$$

де m, l_c, J_{ii}, $i=\overline{1,3}$ – маса ЧЕ, його координата центра мас по осі x_1^1 та моменти інерції в системі координат x_i^1; b_{α}, b_3 – коефіцієнти кутового та лінійного демпфірування коливань ЧЕ; c_{α}, c_3, c_{23} – кутова, лінійна та перехресна жорсткості ПП; F_K, M_K – сила та момент, що створює ЗКП; k_{α}, k_x, k_n, $k_{кп}$, $k_{дм}$ – відповідно коефіцієнти передачі ДП (по відповідним інформативним переміщенням ЧЕ), ПКЛ, ЗКП та контуру електричного демпфірування; l_F – координата прикладання сили F_K до ЧЕ зі сторони ЗКП; w_i, Ω_i, $i=\overline{1,3}$ – переносні лінійні прискорення та кутові швидкості руху основи, задані в системі координат x_i^0.

Лінійне прискорення w_3 є величиною, що вимірюється акселерометром, останні прискорення, кутові швидкості та їх похідні (кутові прискорення) є джерелом його вібраційних похибок.

Ввівши позначення: $k_{кп}k_n=k$; $k_{кп}k_{дм}=k_{д}$; $c_{\alpha}+l_c k k_{\alpha}=G$; $-c_{23}+l_c k k_x=C_x$; $-c_{23}+k k_{\alpha}=C_{\alpha}$; $c_3+k k_x=C$; $b_{\alpha}+l_c k_{д} k_{\alpha}=D$; $k_{д}k_{\alpha}=B_{\alpha}$; $l_c k_{д} k_x=B_x$; $b_3+k_{д}k_x=B$, та виконавши підстановку (2) в (1), систему лінеаризованих рівнянь ідеальної роботи НА запишемо в зручному для дослідження матричному операторному вигляді

$$A(p)\ \alpha, x^{\ T}=\tilde{F}_1(t)+\varepsilon\tilde{F}_2(t), \qquad (3)$$

де: $p=\dfrac{d}{dt}$ – оператор диференціювання;

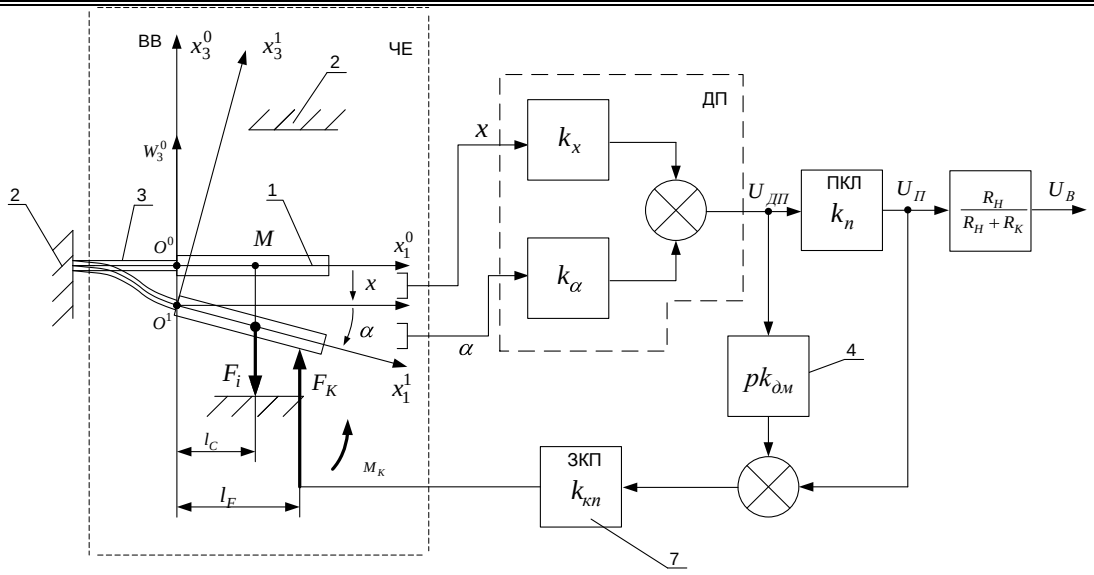


Рис. 1. Функціональна схема НА з ПП ЧЕ: 1 – інерційна маса; 2 - основа акселерометра; 3 – пружний підвіс ІМ; 4 – ланка електричного демпфірування коливань ІМ

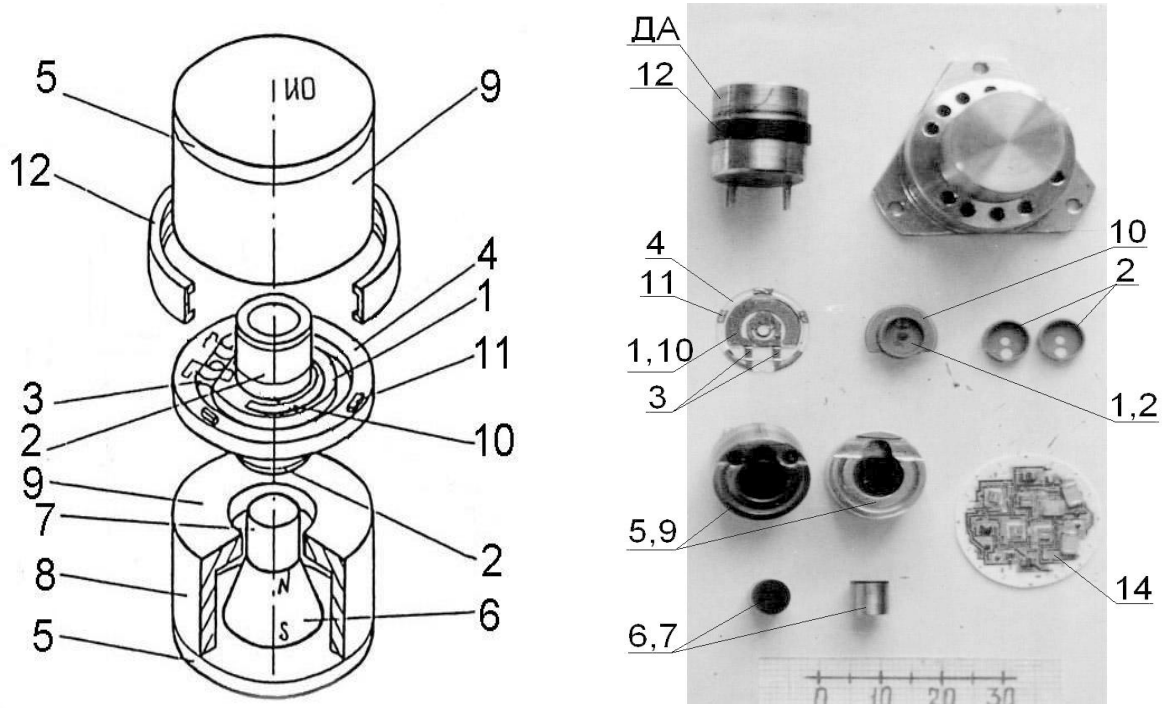


Рис. 2. Конструкція НА з кварцовим ПП ЧЕ: 1, 2 – елементи ІМ; 3 – ПП ІМ в основі 4 ЧЕ; 10, 9, 11 – елементи ємнісного ДП ЧЕ; 2, 5, 6, 7, 8 – елементи ЗКП ; 12 – елемент корпусу; 14 – плата електроніки

$$A_{11}(p) = J_{22}p^2 + Dp + G; \qquad A_{12}(p) = ml_c p^2 + B_x p + C_x;$$
$$A_{21}(p) = ml_c p^2 + B_\alpha p + C_\alpha; \qquad A_{22}(p) = mp^2 + Bp + C; \qquad (4)$$

$$\tilde{F}_1(t) = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ F_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml_c w_3 - J_{22}\dot{\Omega} + (J_{33} - J_{11})\Omega_1\Omega_3 \\ mw_3 - ml_c\dot{\Omega}_2 + ml_c\Omega_1\Omega_3 \end{bmatrix} -$$

адитивні збудження, які залежать від кінематичних параметрів руху основи, але не залежать від узагальнених координат;

$$\tilde{F}_2(t) = \begin{bmatrix} M_2(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ml_c w_1 + (J_{33} - J_{11})(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) & ml_c(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \\ ml_c(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) & m(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ x \end{bmatrix} - \quad (5)$$

мультиплікативні збудження, які залежать від кінематичних параметрів руху основи та лінійно помножені на α і x. В системі (3) цим збудженням приписаний малий параметр ε в припущенні що вони, внаслідок малості переміщень α і x чутливого елементу компенсаційного акселерометра, мають більш високий порядок малості, чим $\tilde{F}_1(t)$.

Задамо параметри детермінованих ЛВ та КВ ξ_l, $(l = \overline{1,6})$, які входять до виразів (4) і (5) та діють на НА з боку основи, у вигляді:

$$\begin{aligned} w_i &= a_i \cos(n_i t + \gamma_i) = a_{i*} e^{jn_i t} + \bar{a}_{i*} e^{-jn_i t}; \qquad \gamma_3 = 0; \\ \Omega_i &= b_i \cos(\omega_i t + \delta_i) = b_{i*} e^{j\omega_i t} + \bar{b}_{i*} e^{-j\omega_i t}, \quad i = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (6)$$

де a_i, b_i, n_i, ω_i, γ_i, δ_i – амплітуди, частоти та початкові фази ЛВ і КВ; $a_{i*} = 0,5a_i e^{-j\gamma_i}$, $b_{i*} = 0,5b_i e^{-j\delta_i}$ – відповідні комплексні амплітуди. Тут і далі рисочка зверху або абревіатура (КС) позначають комплексно–сполучену величину.

Знайдемо формули, які описують систематичні (усереднені за часом) зміщення "нуля" вихідного сигналу НА при дії на нього (сумісному чи окремому) ЛВ та КВ виду (6). Також необхідно визначити умови (співвідношення частот та початкових фаз ЛВ та КВ), при яких ці зміщення виникають та при яких вони набувають максимальних значень.

Загальна формула для розрахунку ВП

Розв'яжемо поставлену задачу методом послідових наближень [4]. При цьому, попередньо, не задаючись конкретним виглядом $M(t)$ і $F(t)$, знайдемо частинний розв'язок системи (3)

$$\alpha, x^{T} = W(p)\ M(t), F(t)^{T}, \quad (7)$$

де $W(p) = A^{-1}(p)$ – передаточна матриця системи, елементи якої, при $p = j\omega$, є частотними передаточними функціями (ПФ) ЧЕ, що визначаються з виразів:

$$W_{11}(\omega) = (C - \omega^2 m + j\omega B)\Delta^{-1}(\omega), \quad (8)$$

$$W_{12}(\omega) = -(C_x - \omega^2 m l_c + j\omega B_x)\Delta^{-1}(\omega)$$
$$W_{21}(\omega) = -(C_\alpha - \omega^2 m l_c + j\omega B_\alpha)\Delta^{-1}(\omega);$$
$$W_{22}(\omega) = (G - \omega^2 J_{22} + j\omega D)\Delta^{-1}(\omega),$$

де $\Delta(\omega) = (G - \omega^2 J_{22})(C - \omega^2 m) - (C_\alpha - \omega^2 m l_c)(C_x -$
$-\omega^2 m l_c) + j\omega\Big[(C - \omega^2 m)D + (G - \omega^2 J_{22})B -$
$-(C_x - \omega^2 m l_c)B_\alpha - (C_\alpha - \omega^2 m l_c)B_x\Big]$.

Для постійних складових правих частин системи рівнянь (3) $\langle M(t)\rangle = \langle M\rangle$, $\langle F(t)\rangle = \langle F\rangle$ запишемо шукані "відходи" маятникового ЧЕ НА

$$\Big[\langle\alpha\rangle, \langle x\rangle\Big]^T = W(0)\Big[\langle M\rangle, \langle F\rangle\Big]^T, \tag{9}$$

де $\langle\ldots\rangle = T^{-1}\int_0^T \ldots\, dt$ – оператор усереднення за часом T;

$W(0) = W(\omega = 0) = \Delta_0^{-1}\begin{bmatrix} C & -C_x \\ -C_\alpha & G \end{bmatrix}$ – матриця статичних коефіцієнтів передачі ЧЕ; $\Delta_0 = \Delta(\omega = 0) = CG - C_x C_\alpha$.

Згідно рис. 1 та рівнянь (2) вихідні напруги ДП ЧЕ $\langle U_{ДП}\rangle$ та НА $\langle U_B\rangle$, що відповідають "відходам" (9) маятникового ЧЕ, визначаються формулами:

$$\langle U_{ДП}\rangle = k_\alpha\alpha + k_x x = k_M\langle M\rangle + k_F\langle F\rangle;$$
$$\langle U_B\rangle = k_П\langle U_{ДП}\rangle = k_П(k_M\langle M\rangle + k_F\langle F\rangle), \tag{10}$$

де $k_M = (k_\alpha C + k_x C_\alpha)\Delta_0^{-1} = (c_3 k_\alpha + c_{23}k_x)\Delta_0^{-1}$;
$k_F = (k_x G - k_\alpha C_x)\Delta_0^{-1} = (c_\alpha k_x + c_{23}k_\alpha)\Delta_0^{-1}$; $k_П = k_n R_н(R_н + R_к)^{-1}$;

$R_н$, $R_к$ – відповідно електричні опори зовнішнього навантаження та котушки ЗКП. Підставивши у формулу (10) замість $\langle F\rangle$ та $\langle M\rangle$ вирази $F = mw_3$ і $M = Fl_c$, отримуємо вихідну напругу МКА, що відповідає вимірювальному акселерометром прискоренню $U_B = k_\Sigma w_3$,
де $k_\Sigma = k_П(k_M l_c + k_F)$ – коефіцієнт перетворення акселерометра.

Відповідно, загальна формула для оцінки абсолютних адитивних ВП НА від дії збуджуючого фактору ξ_l, який нас цікавить, має вигляд

$$\Delta_{ВП}(\xi_l) = \frac{\langle U_B(\xi_l)\rangle}{k_\Sigma} = \frac{k_M\langle M(\xi_l)\rangle + k_F\langle F(\xi_l)\rangle}{(k_M l_c + k_F)m}. \tag{11}$$

Формули (4), (5) та (11) показують, що задача отримання аналітичних виразів для розрахунку вібраційних похибок НА з ПП ЧЕ, які виникають в найбільш загальних умовах просторового вібраційного руху основи, по суті зводиться до знаходження формул для визначення постійних складових $\langle \tilde{F}_1 \rangle$ і $\langle \tilde{F}_2 \rangle$ збуджень (4) та (5), які виникають, відповідно, в першому та другому наближеннях, з наступною їх підстановкою у загальну формулу (11).

Вібраційна похибка першого наближення

Для знаходження розв'язку системи (3) у першому наближенні приймемо $\varepsilon = 0$. Підставивши (6) у (4), визначимо вираз для збуджень першого наближення

$$\tilde{F}_1(t) = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ F_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml_C \\ m \end{bmatrix} a_{3*} e^{jn_3 t} - \begin{bmatrix} J_{22} \\ ml_C \end{bmatrix} j\omega_2 b_{2*} e^{j\omega_2 t} +$$
$$+ \begin{bmatrix} J_{33} - J_{11} \\ ml_C \end{bmatrix} (b_{1*} b_{3*} e^{j(\omega_1 - \omega_3)t} + + b_{1*} \bar{b}_{3*} e^{j(\omega_1 - \omega_3)t}) + KC.$$

Аналіз цього виразу показує, що при $\omega_1 = \omega_3$ з'являються постійні складові збуджень

$$\begin{bmatrix} \langle M_1 \rangle \\ \langle F_1 \rangle \end{bmatrix} = 0{,}5 \begin{bmatrix} J_{33} - J_{11} \\ ml_c \end{bmatrix} b_1 b_3 \cos(\delta_1 - \delta_3),$$

які приймають максимальні значення $\langle M_1 \rangle_m$ та $\langle F_1 \rangle_m$ при $\delta_1 = \delta_3$ та рівні нулю при $\delta_1 = 0{,}5\pi + \delta_3$.

З фізичної точки зору, причиною виникнення збуджуючого моменту $\langle M_1 \rangle$, відповідального узагальнюючій координаті α, є відмінність від нуля різниці моментів інерції ЧЕ $J_{33} - J_{11}$, а збуджуючої сили $\langle F_1 \rangle$, відповідній узагальнюючій координаті x – наявність ступеню свободи ЧЕ по даній координаті. Останнє характерне тільки для НА з пружним підвісом ЧЕ.

Відповідно до (11), виникаюча в першому наближенні максимальна ВП НА може бути визначена за формулою

$$\Delta_{ВП}(\Omega_1 \Omega_3)_m = \frac{k_M (J_{33} - J_{11}) + k_F m l_C}{2(k_M l_C + k_F) m w_3^N} b_1 b_3. \qquad (12)$$

Запишемо необхідний для подальших викладок частинний розв'язок (7) системи (3) в першому наближенні в розгорнутому вигляді

$$\begin{bmatrix}\alpha_1(t)\\ x_1(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W_{\alpha 1}\\ W_{x1}\end{bmatrix}a_{3*}e^{jn_3t}+\begin{bmatrix}W_{\alpha 2}\\ W_{x2}\end{bmatrix}j\omega_2 b_{2*}e^{j\omega_2 t}+$$
$$+\begin{bmatrix}W_{\alpha 3}\\ W_{x3}\end{bmatrix}b_{1*}b_{3*}e^{j(\omega_1+\omega_3)t}+\begin{bmatrix}W_{\alpha 4}\\ W_{x4}\end{bmatrix}b_1\bar{b}_{3*}e^{j(\omega_1-\omega_3)t}+KC, \qquad (13)$$

де $W_{\alpha 1}=W_{11}(n_3)ml_c-W_{12}(n_3)m;\quad W_{\alpha 2}=-W_{11}(\omega_2)J_{22}+W_{12}(\omega_2)ml_c;$
$W_{\alpha 3}=W_{11}(\omega_1+\omega_3)(J_{33}-J_{11})-W_{12}(\omega_1+\omega_3)ml_c;$
$W_{\alpha 4}=W_{11}(\omega_1-\omega_3)(J_{33}-J_{11})-W_{12}(\omega_1-\omega_3)ml_c;$

$W_{x1}=-W_{21}(n_3)ml_c+W_{22}(n_3)m;\ W_{x2}=W_{21}(\omega_2)J_{22}+W_{22}(\omega_2)ml_c;$
$W_{x3}=-W_{21}(\omega_1+\omega_3)(J_{33}-J_{11})+W_{22}(\omega_1+\omega_3)ml_c;$
$W_{x4}=-W_{21}(\omega_1-\omega_3)(J_{33}-J_{11})+W_{22}(\omega_1-\omega_3)ml_c. \qquad (14)$

Подавши комплексні частотні ПФ (14) у показовому вигляді

$$W_{\substack{\alpha i,\\ xi}}(\omega)=H_{\substack{\alpha i,\\ xi}}(\omega)e^{j\phi_{\substack{\alpha i,\\ xi}}(\omega)}, \qquad (15)$$

де $H_{\substack{\alpha i,\\ xi}}(\omega)=\left[\mathrm{Re}W_{\substack{\alpha i,\\ xi}}(\omega)+JmW_{\substack{\alpha i,\\ xi}}(\omega)\right]^{0,5}$ – відповідні амплітудно-частотні характеристики (АЧХ); $\phi_{\substack{\alpha i,\\ xi}}(\omega)=-arctg\dfrac{JmW_{\substack{\alpha i,\\ xi}}(\omega)}{\mathrm{Re}W_{\substack{\alpha i,\\ xi}}(\omega)}$ – фазочастотні характеристики, $i=\overline{1,4}$, представимо розв'язок (13) у зручному для використання у другому наближенні вигляді як скалярний добуток чотирьохмірних векторів

$$\begin{bmatrix}\alpha_1(t)\\ x_1(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^T_{*\alpha}\\ A^T_{*x}\end{bmatrix}e^{j\nu t}+\begin{bmatrix}\overline{A^T_{*\alpha}}\\ \overline{A^T_{*x}}\end{bmatrix}e^{j\nu t}, \qquad (16)$$

де $A^T_{\substack{*\alpha,\\ *x}}=\left[\ W_{\substack{\alpha 1,\\ x1}}a_{3*},\ W_{\substack{\alpha 2,\\ x2}}j\omega_2 b_{2*},\ W_{\substack{\alpha 3,\\ x3}}b_{1*}b_{3*},\ W_{\substack{\alpha 4,\\ x4}}b_{1*}\bar{b}_{3*}\ \right];$

$\nu^T=\left[n_3,\omega_2,\omega_1+\omega_3,\underline{\omega_1-\omega_3}\right];\quad e^{j\nu^T t}=\left[e^{jn_3t},e^{j\omega_2 t},e^{j(\omega_1+\omega_3)t},\underline{e^{j(\omega_1-\omega_3)t}}\right].$

Вібраційні похибки другого наближення

Знайдемо частинний розв'язок (7) системи (3) у другому наближенні, який відповідає правій частині $\varepsilon\tilde{F}_2(t)$. Для цього попередньо, шляхом підстановки співвідношень (6) і (16) у формули (5), визначимо доданки збуджень $M_2(\xi_l)$, $F_2(\xi_l)$, що діють на ЧЕ НА, у другому наближенні:

$$
\begin{aligned}
& w_1\alpha_1(t) = a_{1*}A^T_{*\alpha}e^{j(\nu+\tilde{n}_1)t} + \bar{a}_{1*}A^T_{*\alpha}e^{j(\nu-\tilde{n}_1)t} + KC;\\
& \Omega_1^2 - \Omega_3^2 \;\; \alpha_1(t) = A^T_{*\alpha}(b^2_{1*}e^{j(\nu+2\tilde{\omega}_1)t} + 0.5b_1^2e^{j\nu t} +\\
& +\bar{b}^2_{1*}e^{j(\nu-2\tilde{\omega}_1)t} - b^2_{3*}e^{j(\nu+2\tilde{\omega}_3)t} - 0,5b^2_{3*}e^{j\nu t} - \bar{b}^2_{3*}e^{j(\nu-2\bar{\omega}_3)t}) + KC;\\
& \Omega_1^2 + \Omega_2^2 \;\; \alpha_1(t)\,,\, x_1(t)\;^T = \underset{x}{A^T_{*\alpha,}}(b^2_{1*}e^{j(\nu+2\tilde{\omega}_1)t} + 0,5b_1^2e^{j\nu t} +\\
& +\bar{b}^2_{1*}e^{j(\nu-2\tilde{\omega}_1)t} + b^2_{2*}e^{j(\nu+2\tilde{\omega}_2)t}0,5b_2^2e^{j\nu t} + \bar{b}^2_{2*}e^{j(\nu-2\tilde{\omega}_2)t} \quad + KC,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

де $\tilde{\omega}_i = \;\omega_i\,,\omega_i\,,\omega_i\,,\omega_i\;^T$; $\;\tilde{n}_i = \;n_i\,,n_i\,,n_i\,,n_i\;^T$, $i=\overline{1,3}$.

Запишемо в розгорнутому вигляді вектори стовпці комбінаційних частот, які стоять у показниках експонент у виразах (17):

$$
\begin{aligned}
& \nu+\tilde{n}_1 = \left[\, n_3+n_1, \omega_2+n_1, \omega_2+\omega_3+n_1, \underline{\omega_1-\omega_3+n_1}\,\right]^T;\\
& \nu-\tilde{n}_1 = \left[\, \underline{n_3-n_1}, \underline{\omega_2-n_1}, \underline{\omega_1+\omega_3-n_1}, \underline{\omega_1-\omega_3-n_1}\;\right]^T;\\
& \nu+2\tilde{\omega}_1 = \left[\, n_3+2\omega_1, \omega_2+2\omega_1, 3\omega_1+\omega_3, \underline{3\omega_1-\omega_3}\,\right]^T;\\
& \nu-2\tilde{\omega}_1 = \left[\, \underline{n_3-2\omega_1}, \underline{\omega_2-2\omega_1}, \underline{\omega_3-\omega_1}, -\omega_1-\omega_3\,\right]^T;\\
& \nu+2\tilde{\omega}_2 = \left[\, n_3+2\omega_2, 3\omega_2, \omega_1+\omega_3+2\omega_2, \underline{\omega_1-\omega_3+2\omega_2}\,\right]^T;\\
& \nu-2\tilde{\omega}_2 = \left[\, \underline{n_3-2\omega_2}\,, -\omega_2\,, \underline{\omega_1+\omega_3-2\omega_2}\,, \underline{\omega_1-\omega_3-2\omega_2}\,\right]^T;\\
& \nu+2\tilde{\omega}_3 = \;\; n_3+2\omega_3, \omega_2+2\omega_3, \omega_1+3\omega_3, \omega_1+\omega_3\;^T;\\
& \nu-2\tilde{\omega}_3 = \left[\, \underline{n_3-2\omega_3}, \underline{\omega_2-2\omega_3}, \underline{\omega_1-\omega_3}, \underline{\omega_1-3\omega_3}\;\right]^T.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

У виразах (16) і (18) підкреслені елементи векторів комбінаційних частот, які при означених ЛВ та КВ призводять до виникнення постійних складових збуджень $\langle M_2\rangle$ і $\langle F_2\rangle$, якщо підкреслені комбінації частот будуть дорівнювати нулю. Ці збудження, відповідно до (9), спричиняють цікавлячи нас "відходи" ЧЕ НА $\langle\alpha_2\rangle$ та $\langle x_2\rangle$ у другому наближенні.

Згідно (5) запишемо максимальні значення постійних складових збуджень, діючих на ЧЕ НА у другому наближенні

$$\langle F_2\rangle_m = -ml_c\langle(\Omega_1^2+\Omega_2^2)\alpha_1\rangle_m + m\langle(\Omega_1^2+\Omega_2^2)x_1\rangle_m,$$

$$\langle M_2\rangle_m = ml_c\langle w_1\alpha_1\rangle_m + (J_{33}-J_{11})\langle(\Omega_1^2-\Omega_3^2)\alpha_1\rangle_m + \\ + ml_c\langle(\Omega_1^2+\Omega_2^2)x_1\rangle_m. \qquad (19)$$

Визначивши умови, при яких праві частини (19) мають максимальні значення, отримаємо формули для їх розрахунку:

$$\langle w_1\alpha_1\rangle_m = 0,25\mu\sum_{j=1}^{5}E_{1j};\ \langle(\Omega_1^2-\Omega_3^2)\alpha_1\rangle_m = 0,25\mu\sum_{j=1}^{10}E_{2j};$$

$$\langle(\Omega_1^2+\Omega_2^2)\alpha_1\rangle_m = 0,25\mu\sum_{j=1}^{9}E_{3j};\ \langle(\Omega_1^2+\Omega_2^2)x_1\rangle_m = 0,25\mu\sum_{j=1}^{9}E_{4j}, \qquad (20)$$

де $\mu = \max(\mu_{\alpha i}, \mu_{xi}) \approx 1,2\ldots2$, $i = \overline{1,4}$ – показники коливальності АЧХ (15).

Формули для визначення величин E_{ij} $(i = \overline{1,4})$, які входять у (20), мають досить простий вигляд, наприклад:

$$E_{11} = H_{\alpha 4}(0)a_1b_1b_3;\ \ E_{24} = H_{\alpha 2}(0)\omega_2 b_1^2 b_2,$$

і, враховуючи обмежений об'єм статті, тут не наводяться.

Аналітичні вирази, які описують у другому наближенні ВП НА від ЛВ і КВ основи, одержуються після підстановки (20) у (19), а співвідношень (19) у загальну формулу (11) для оцінки ВП.

Розрахунок ВП НА для конкретної ІНС

Обчислимо по отриманим у статті формулам вібраційні похибки НА з ПП типу АК–6. Три таких акселерометри, спільно з трьома лазерними гіроскопами (ЛГ) типу "Гранат–1М", входять до складу одного з варіантів дослідного зразка комплексу командних приладів (ККП) безплатформної ІНС (БІНС) української ракети–носія "Циклон – 4". Відзначимо, що для якісної роботи БІНС рівень ВП НА в умовах експлуатації системи не повинен перевищувати $10^{-4}\ldots10^{-3}$м/с^2 [1]. У виконанні цієї умови і полягає суть задачі забезпечення вібростійкості акселерометрів.

Параметри НА АК–6 беремо такими: $m = 4,14\cdot10^{-4}кг$; $l_c = 3,2\cdot10^{-3}м$; $J_{22} = 7,25\cdot10^{-9}кг\cdot м^2$; $C_3 = 342,4H\cdot м^{-1}$; $G = 7,31\cdot10^{-4}H\cdot м\cdot рад^{-1}$; $C_{23} = 0,457H$; $b = 9,2\cdot10^{-7}H\cdot м\cdot с$; $b_3 = 0,15H\cdot с\cdot м^{-1}$; $k_\alpha = 1,12\cdot10^4 B\cdot рад^{-1}$; $k_n = 18$; $k_{кп} = 3,4\cdot10^{-3}H\cdot B^{-1}$.

За джерело ЛВ виберемо задані у міжнародних стандартах [1] для ракетної техніки параметри просторових вібрацій основи з амплітудами $a_i = 200$м/с^2 у діапазоні частот $20\ldots2000$Гц, а за основне джерело КВ (по-

ряд з просторовими КВ основи) – збудження, що діють на НА зі сторони вібропідвісів ЛГ, які здійснюють кутові коливання ККП навколо його вимірювальних осей з амплітудами $b_i \approx 5 рад \cdot с^{-1}$ на частотах $f_i = \omega_i \cdot (2\pi)^{-1} = 400 Гц$.

Результати обчислень ВП НА АК–6 за загальною формулою (11) при $\mu = 1{,}5$ наведені в таблиці. Аналіз результатів обчислень показує, що розглянуті у статті методичні ВП від ряду збуджень значно перевищують допустимий для цілей інерціальної навігації рівень.

Таблиця.

Числові оцінки методичних ВП МКА з ПП типу АК–6

Співвідношення частот ВЗ і КК	1	$n_1 = n_3$	$\omega_1 = \omega_3$	$\omega_3 = 3\omega_1$	$\omega_1 = 3\omega_3$	$\omega_2 = 2\omega_1$	$\omega_2 = 2\omega_3$
Значення частот, $f_i, \cdot 10^2 Гц$	2	0,05 …20	4	$\omega_1 = 4$	$\omega_3 = 4$	$\omega_1 = 4$	$\omega_3 = 4$
Величина ВП $\Delta w, 10^{-3} м \cdot с^{-2}$	3	20	112	0,006	0,006	4,1	4,1

1	$2\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$	$2\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$	$\omega_3 = \omega_1 + 2\omega_2$	$\omega_1 = \omega_3 + 2\omega_2$	$0{,}5\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$	$\omega_3 = \omega_1 + 0{,}5\omega_2$	$\omega_1 = \omega_3 + 0{,}5\omega_2$
2	$\omega_1 = 6$ $\omega_3 = 10$	$\omega_1 = 8$ $\omega_2 = 10$	$\omega_1 = 4$ $\omega_2 = 6$	$\omega_2 = 4$ $\omega_3 = 2$	$\omega_1 = 4$ $\omega_3 = 4$	$\omega_1 = 4$ $\omega_2 = 8$	$\omega_2 = 6$ $\omega_3 = 8$
3	50	0,9	5,3	2,4	42	4,2	4,2

1	$n_3 = 2\omega_2$	$n_3 = 2\omega_3$	$\omega_3 = 2\omega_1$	$n_1 = \omega_1 + \omega_3$	$\omega_3 = n_1 + \omega_1$	$\omega_1 = n_1 + \omega_3$	$n_1 = \omega_2$
2	$\omega_2 = 4$	$\omega_3 = 4$	$\omega_1 = 4$	$\omega_1 = 4$ $\omega_3 = 4$	$\omega_1 = 4$ $n_1 = 6$	$\omega_3 = 4$ $n_1 = 6$	$\omega_2 = 4$
3	4,1	30	30	0,02	0,09	0,09	5

Висновки

Отримані загальна формула (11) та вирази (12), (19) і (20) для розрахунку ВП НА з пружним підвісом ЧЕ, які виникають в найбільш загальних умовах просторового вібраційного руху основи з довільним сполученням частот та початкових фаз детермінованих ЛВ та КВ.

Показано, що наявність пружного підвісу ЧЕ значно розширює кількість методичних ВП НА в порівнянні з НА з класичним жорстким маятниковим підвісом ЧЕ, внаслідок того, що одночасно виникають кутові $\langle\alpha\rangle$ та лінійні $\langle x\rangle$ "відходи" ЧЕ, кожен з яких додає свій внесок у загальний випрямляючий ефект. При цьому, у першому наближенні ВП виникають, згідно (12), від впливу центробіжних сил і моментів інерції, що діють в площині x_1x_3 ЧЕ, а у другому наближенні – як різноманітний прояв випрямляючого ефекту Максвела–Капіци одночасно по кутовій та лінійній координатам руху ЧЕ.

Обчислені в статті методичні ВП навігаційного НА з ПП типу АК–6 свідчать про значне погіршення точності таких НА в реальних умовах експлуатації. Використання отриманих в статті формул для розрахунку ВП на етапі проектування НА з ПП дозволить суттєво збільшити вібростійкість таких акселерометрів за рахунок вибору потрібних значень їх конструктивних параметрів.

Список використаної літератури

1. *Коновалов С. Ф.* Теория виброустойчивости акселерометров.–М.: Машиностроение,1991.– 272с.
2. *Ионин А. М., Слюсарь В.М.* Погрешность маятникового компенсационного акселерометра с упругим подвесом при работе в условиях пространственной вибрации // Механика гироскопических систем: Межвед. науч.–техн. сб.– Київ: "Либідь", 1989.– Вып.8.–С.29–34.
3. *Zbrutsky A., Chernyak N., Skripkovsky G.* Creation of low cost linear accelerometers for navigation and control systems // Symposium Gyro Technology.–Stuttgart, Germany, 2005.– P. 4.1 – 4.11
4. *Лунц Я. Л.* Ошибки гироскопических приборов.–Л.: Судостроениее, 1968.–232с.

УДК 531.383.05

Т. А. Марченко, В. В. Попов

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЕТА ПРИ НАБОРЕ ВЫСОТЫ

Введение

Управление самолетом в вертикальной плоскости является наиболее сложным элементом полета, особенно в режимах существенного изменения режима полета, таких как взлет, набор высоты, снижение с определенными параметрами полета, обеспечивающие заданные условия и критерии оптимальности. Особенно эта проблема стала острой в последнее время, так как существенно повысились требования к точности полета самолета на заданной траектории.

Все это в общей сложности требует существенного улучшения траекторного управления в вертикальной плоскости и нахождения новых подходов к оптимизации алгоритмов управления полетом самолета. Существенным при этом является необходимость использования новых теоретических основ синтеза оптимальных алгоритмов по определенным критериям и применения информации, обеспечивающей наибольшую вероятностную оценку состояния самолета в пространстве и выполнение заданных требований по выдерживанию установленной траектории полета [1].

Постановка задачи

В данной статье делается попытка обобщить некоторые возможные способы выполнения этих условий и выделить из них те, которые заслуживают наибольшее внимание. Рассматриваются наиболее используемые методы обеспечения управляющих сигналов системы автоматического управления (САУ) для осуществления управления самолетом в вертикальной плоскости и выделяется метод, который позволяет осуществлять управление полетом с выдерживанием заданных критериев по точности, экономичности и безопасности полета.

Содержание

Управление полетом самолета в вертикальной плоскости только с использованием одного канала – канала руля высоты – имеет существенные недостатки. Именно поэтому в последнее время нашло применение использование второго канала – канала управления скоростью полета.

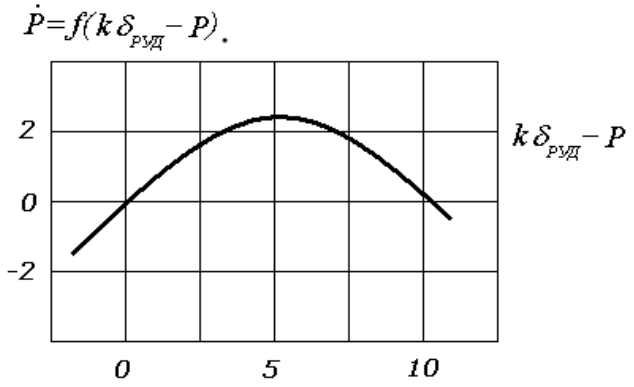
Модель силовой установки является нелинейной и многомерной. Она строится на основе функционального описания работы элементов двигателя и его внутренних контуров управления, должна достаточно точно отражать динамические и статические свойства двигателя.

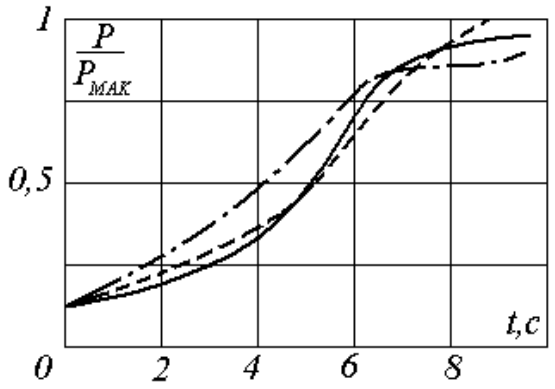
Упрощенная модель двигателя может быть представлена дифференциальным нелинейным уравнением:

$$\dot{P} = \sum_{i=1}^{m} d_i (k\delta_{РУД} - P)^i, \qquad (1)$$

где d_i и k – нелинейные функции высоты и числа M полета;

Типичный вид функции $f(\delta_{РУД} - P)$ для $m = 2$ имеет вид





——————— экспериментальная

——————— экспериментальная
– – – – – линейная модель
–·–·–·– нелинейная модель

Рис. 1. Зависимость тяги от перемещения органа управления

Сравнение экспериментальных и расчетных переходных функций показывает достаточную точность предложенной модели (ошибка 7–9%).

Распространенная модель двигателя типа апериодического звена дает более грубое приближение, при этом ошибка (20-23) % (рис. 1).

Для описания процесса управления скоростью полета уравнение (1) необходимо дополнить уравнениями продольного движения.

$$
\begin{gathered}
m\dot{V} = P\cos\alpha - X - mg\sin\theta, \\
mV\dot{\theta} = P\sin\alpha + Y - mg\cos\theta, \\
I_z\dot{\omega}_z = M_z, \\
\dot{\upsilon} = \omega_z, \\
\upsilon = \theta + \alpha, \\
\dot{H} = V\sin\theta, \\
q = \frac{\rho V^2}{2}.
\end{gathered}
\qquad (2)
$$

Уравнения (1), (2) в рамках сделанных допущений позволяют описывать управление продольным движением «в большом» при одновременном воздействии на тягу двигателя и на руль высоты.

Типичным примером управления продольным движением «в большом» может служить набор высоты. В простейшем случае задается программа изменения высоты и скорости полета $V_0(t)$ и $H_0(t)$ или программа изменения скорости в функции высоты полета.

Программное автоматическое регулирование высоты и скорости является достаточно распространенным способом управления продольным движением центра масс самолета. Однако он имеет принципиальный недостаток – критичность к изменению условий полета и параметров самолета по отношению к расчетным [2].

Более перспективным представляется способ оптимизации управления, основанный на текущей идентификации параметров самолета. В этом случае заданное качество управления продольным движением достигается минимизацией некоторого функционала и формирования оптимальных воздействий на руль высоты и рычаг управления двигателем (РУД).

Для описания процесса стабилизации скорости полета путем управления тягой двигателя воспользуемся уравнениями длиннопериодического движения, включив в вектор состояния приращение тяги двигателя:

$$\begin{aligned}
&\Delta\dot{V} + \alpha_x^V \Delta V + \alpha_x^\alpha \Delta\alpha + \alpha_x^\theta \Delta\theta + \alpha_x^P \Delta P = -\dot{U}_x\,,\\
&\Delta\dot{\theta} + \alpha_y^V \Delta V + \alpha_y^\alpha \Delta\alpha + \alpha_y^P \Delta P = 0,\\
&\alpha_{m_z}^\alpha \Delta\alpha = \delta_{m_z}^{\delta_B}(-\Delta\delta_B).
\end{aligned} \qquad (3)$$

Расширение вектора состояния влечет за собой изменение коэффициентов α_x^V, α_y^V и появление новых коэффициентов:

$$\alpha_x^V = \frac{X^V}{m}; \qquad \alpha_y^V = \frac{Y^V}{mV_0}; \qquad \alpha_x^P = -\frac{\cos\alpha_0}{m}.$$

Управление тягой двигателя в интересах стабилизации скорости (или числа M) обычно сопровождается стабилизацией высоты полета, и можно пренебречь не только вариациями высоты, но и полагать $\Delta\theta = 0$. Тогда первое уравнение системы (3) становится практически автономным, а приращения $\Delta\alpha$ и $\Delta\theta$, возникающие в процессе стабилизации высоты полета, можно отнести к возмущающим воздействиям.

Постоянная времени линейной модели двигателя зависит от условий полета и режима работы двигателя. Типичный характер переходной функции по скорости имеет вид (рис. 1). Это свойство приобретает особое значение на этапах «пробивания облачности» и захода на посадку.

Уравнения прямолинейного установившегося движения в вертикальной плоскости без крена и без скольжения имеют вид:

$$\begin{aligned}
&P\cos(\alpha - \phi) = C_x S\frac{\rho V^2}{2} + G\sin\upsilon,\\
&C_y S\frac{\rho V^2}{2} + P\sin(\alpha - \phi) = G\cos\upsilon.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Допустимые по условиям безопасности полета значения $C_{y\,БЕЗ}$ составляют лишь некоторую долю $(0.7-0.9)$ от величины $C_{y\,MAX}$ и берутся из данных летных испытаний самолетов.

Время подъема самолета на различные высоты (рис.3) можно определить на основании следующих соображений (рис. 2).

Пусть в некоторый момент времени t вертикальная составляющая скорости самолета равна $V_{y\,MAX}$; тогда за малое время dt самолет поднимается на малую высоту dH, так что

$$dt = \frac{dH}{V_{y_{MAX}}}. \qquad (5)$$

Интегрируя это уравнение, получим выражение для наименьшего времени подъема самолета на высоту H:

$$t = \int_0^H \frac{dH}{V_{y_{MAX}}}. \qquad (6)$$

Планиметрируя площадь, ограниченную осью ординат (H), осью абсцисс $\left(\frac{1}{V_{y_{MAX}}}\right)$ и кривой $\frac{1}{V_{y_{MAX}}} = f(H)$, находят время подъема t.

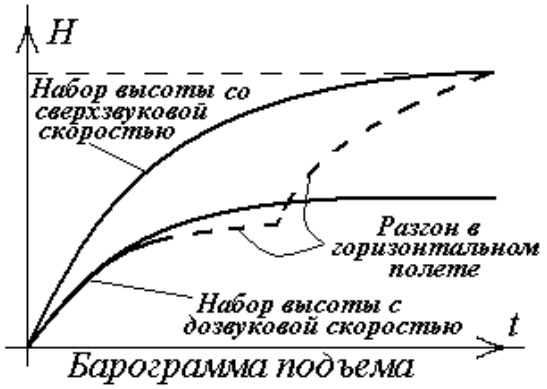


Рис. 2. Зависимость высоты от времени

Использование информации об угле атаки в автомате тяги основано на известной зависимости между углом атаки α и скоростью полета V.

Для конкретной коррекции используются аэродинамические характеристики конкретного самолета.

Закон управления автомата тяги, использующего информацию об угле атаки, реализуется в виде:

$$\Delta\delta_Д = k_Д^{\alpha}(\alpha_з - \alpha) + k_Д^{\dot{V}}\Delta\dot{V} + k_Д^{\upsilon}\Delta\upsilon. \qquad (7)$$

Функциональная схема системы автоматического предупреждения и предотвращения срывных режимов представлена в следующем виде:

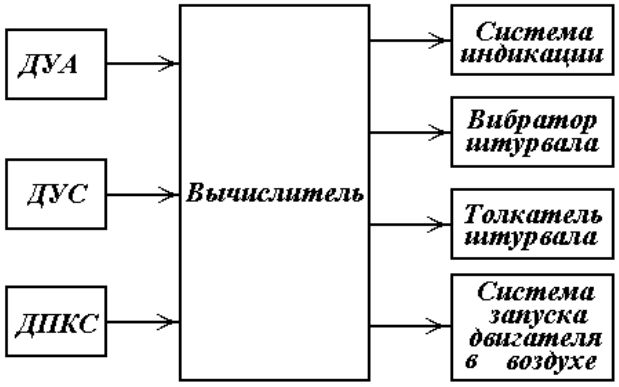


Рис. 3. Функциональная схема системы предупреждения

где ДУА – датчик угла атаки;

ДУС – датчик угловой скорости;

ДПКС – датчик положения конфигурации самолета.

Работа этой системы автоматического предупреждения и предотвращения срывных режимов состоит в следующем (рис. 3):

Информация от датчика угла атаки о текущем значении угла атаки поступает в вычислитель, где она обрабатывается в зависимости от скорости изменения тангажа (информация от датчика угловой скорости тангажа ω_z) и положения конфигурации самолета.

Таким образом, использование информации об угле атаки в пилотажно-навигационном комплексе позволит организовать построение алгоритмов управления продольным движением самолета в вертикальной плоскости, оптимальных по критериям безопасности, быстродействия и экономичности.

Из краткого рассмотрения проблемы автоматического управления полетом самолета в вертикальной плоскости следует, что построение алгоритмов управления продольным движением самолета возможно по двум схемам [3]:

I. Первая схема предусматривает использование двух каналов управления - канала управления рулем высоты и автомата тяги, управляющего работой двигателя по информации о воздушной скорости полета.
II. Вторая схема предусматривает использование также двух каналов управления – канала управления рулем высоты и автомата тяги, управляющего работой двигателя по информации об угле атаки.

При первой схеме алгоритмы управления полетом самолета в вертикальной плоскости могут быть построены на основе примерных законов управления:

$$\begin{aligned}\delta_B &= k_B^H (H - H_з) + k_B^{\upsilon}\Delta\upsilon + k_B^{\omega_z}\omega_z,\\ \delta_Д &= k_Д^V (V - V_з) + k_Д^{\dot V} p\Delta V + k_Д^{\upsilon}\Delta\upsilon.\end{aligned} \qquad (8)$$

В процессе оптимизации этих законов потребуется корректировка для обеспечения заданных требований по астатизму системы к определенным воздействиям, что приведет к необходимости введения других видов обратных связей или введение интегральных составляющих.

Для обеспечения режима перехода с одного режима полета на другой в структуре закона управления рулем высоты в основном будет меняться первая составляющая (8), исходя из заданных условий переходного этапа полета.

Во второй схеме алгоритмы управления полетом самолета в вертикальной плоскости могут быть построены на основе примерных законов управления:

$$\begin{aligned}\delta_B &= k_B^H (H - H_з) + k_B^{\upsilon}\Delta\upsilon + k_B^{\omega_z}\omega_z,\\ \delta_Д &= k_Д^{\alpha} (\alpha - \alpha_з) + k_Д^{\dot V} p\Delta V + k_Д^{\upsilon}\Delta\upsilon.\end{aligned} \qquad (9)$$

Отличительной особенностью этой схемы, как уже отмечалось, является использование информации об угле атаки (9) в контуре автомата тяги в качестве основного управляющего сигнала.

Оптимизация алгоритмов управления полетом самолета в вертикальной плоскости производится на основе заданных определенных критериев по одному из современных методов оптимизации [3].

Так, заслуживающим внимания может быть метод прогнозирующей модели. Управляемый процесс контролируется посредством первичных измерительных преобразователей (датчиков информации). Вектор сигналов наблюдения поступает в систему оптимального оценивания и идентификации.

На выходе этой системы формируется оценка $\hat{x}$ вектора состояния и оценка вектора параметров $\hat{a}$ принятой полной математической модели правляемого процесса (рис. 4). Система оценивания и идентификации помимо формирования оценок $\hat{x}, \hat{a}$ может выявлять отказавшие датчики и каналы, и выдавать сигналы реконфигурации.

Выводы

Система оптимального управления на основе указанной модели управляемого процесса, текущей оценки вектора состояния и критерия оптимизации формирует оптимальное управление. Это управление воздействует на управляемый процесс и используется в модуле оценивания и идентификации. Таким образом, использование информации об угле атаки в

пилотажно-навигационном комплексе позволит организовать построение алгоритмов управления продольным движением самолета в вертикальной плоскости, оптимальных по критериям безопасности, быстродействия и экономичности.

Список использованной литературы

1. *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1972. – 560 с.
2. *Летов А.М.* Математическая теория процессов управления. – М.: Наука, 1981. – 256 с.
3. *Понтрягин Л.С.* и др. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 345 с

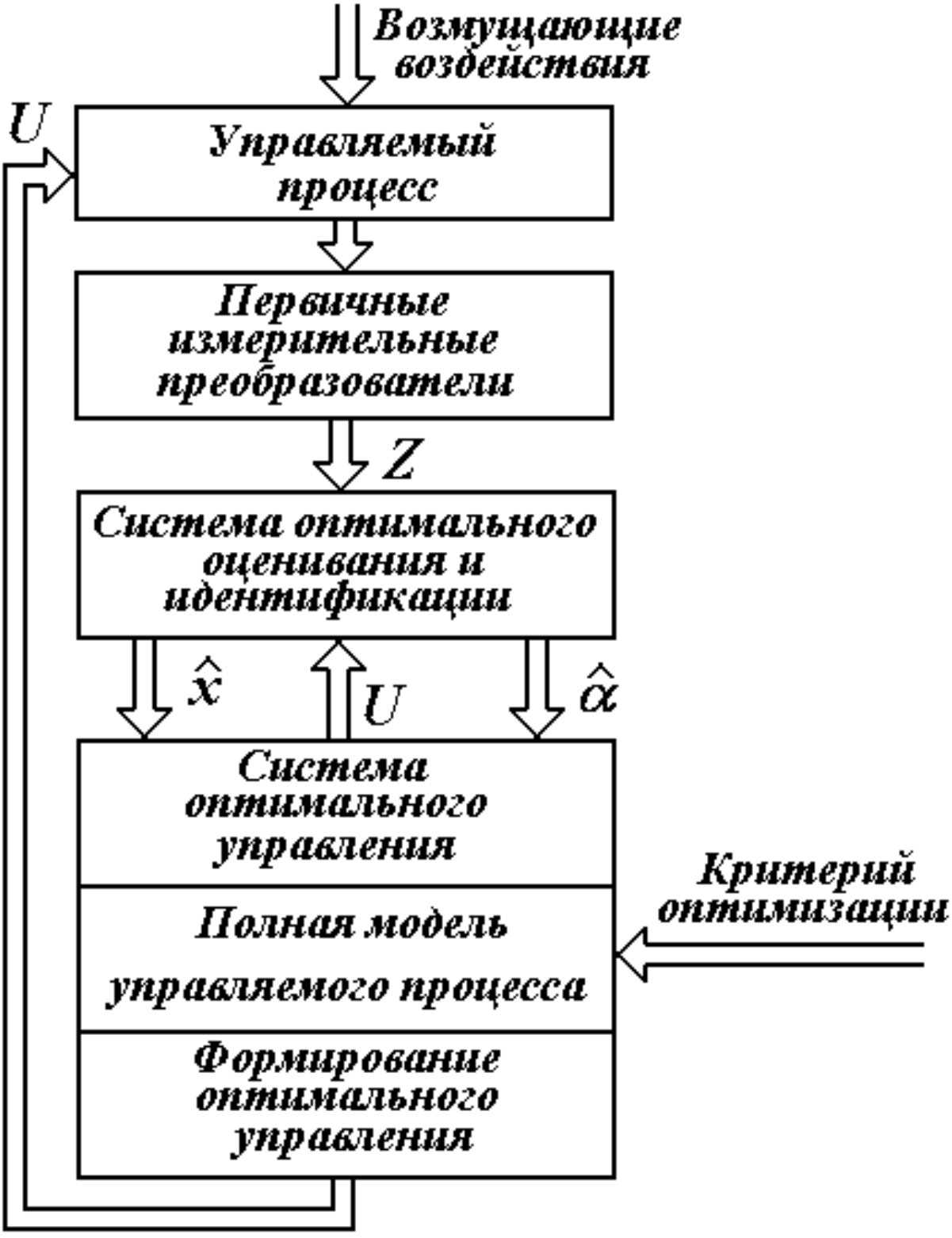


Рис.4. Схема алгоритма прогнозирующей модели

УДК 621.317.725

Ю. М. Туз, О. М. Кривченкова, О. В. Синьоока

ПОХИБКИ ТЕРМОКОМПАРУВАННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДІВ АПРОКСИМАЦІЇ

Вступ

Серед електромагнітних фізичних величин найбільш поширеною є напруга змінного струму. В Україні та інших країнах напруга змінного струму відтворюється в залежності від діапазону значень та діапазону частот декількома еталонами, [1,2]. Еталони напруги змінного струму є одними з найбільш складних тому, що не існує фізичного явища, яке б створювало фізичну величину – середньоквадратичне значення напруги змінного струму. Натомість є тільки аналітична залежність, яка визначає середньоквадратичне значення періодичної напруги змінного струму.

Таким чином

$$U_{СКЗ} = \sqrt{\frac{1}{nT}\int_0^{nT} U^2\ t\ dt}\ , \qquad (1)$$

де T – період сигналу, n – кількість періодів, $U(t)$ – залежність напруги від часу.

У всіх вимірювальних пристроях змінної напруги в тій чи інший спосіб реалізується залежність (1). В формулі (1) передбачається піднесення до квадрату миттєвих значення сигналу, інтегрування квадрату миттєвих значень на протязі часу nT, осереднення на nT і видобування кореня квадратного.

Ця формула може бути реалізована декількома способами. У всіх випадках середньоквадратичне значення змінної напруги визначається по значенню постійної напруги, яке передається від джерел, заснованих на фундаментальних фізичних (Джозефсона) або хімічних (Вінстона) закономірностях. Найбільш поширеними є еталони, побудовані на основі методу термокомпарування, який полягає в досягненні еквівалентності теплових ефектів на одному й тому ж резистивному елементі на напругах змінного і постійного струмів. В більшості еталонів використовують перетворювачі напруги термоелектричні (ПНТЕ), [3, 4] Нажаль, характеристики існуючих термоперетворювачів, як вітчизняних виробників, так і закордонних, не є достатніми для використання в еталонній системі.

Між національними еталонами, заснованими на термокомпаруванні постійної і змінної напруг не існує принципової різниці і сумнівів в тому, що відтворюється середньо квадратичне значення змінної напруги, спи-

раючись на значення постійної напруги. Відмінність національних еталонів різних країн полягає в обґрунтуванні похибок відтворення СКЗ змінної напруги.

Найсуттєвішими джерелами похибок в еталонах термокомпараторного типу є наступні:

- похибка переходу від напруги постійного струму до напруги змінного струму, зумовлена фундаментальними термоелектричними явищами Томсона і Пельтьє, від яких створюється додаткове тепло, крім тепла Джоуля, яке визначається квадратом СКЗ напруги згідно формули (1);
- похибка, зумовлена різночасовим зрівнянням;
- частотна похибка, зумовлена наявністю реактивних складових опору, як в самих перетворювачах так і в додаткових резисторах, з'єднувальних елементах, перемикачах і т.п.;
- похибка відтворення постійної напруги, яка використовується в якості одиниці СКЗ, що передається;
- сукупна похибка інших складових комплекту апаратури, за допомогою яких реалізується передача одиниці від постійної напруги до змінної.

Постановка задачі

ПНТЕ складається з послідовно включеного термоперетворювача (ТП) та додаткового резистора. Реальна макромодель ТП може бути представлена трьома основними залежностями, в яких враховується відхилення від ідеальної квадратичної залежності, [5].

Адитивна модель відрізняється від ідеальної на функцію $\phi\ u$

$$E = K_u U^2 + \phi\ u\ .$$

Мультиплікативна модель відрізняється від ідеальної тим, що коефіцієнт перетворення $K_u\ u$ залежить від напруги.

$$E = K_u\ u\ U^2\ .$$

Ступенева модель передбачає відхилення показника ступеня від 2

$$E = K_u U^{\psi\ u}\ . \qquad (2)$$

Всі ці моделі мають право на існування. Для подальшого моделювання та визначення похибок апроксимації поліноміальної моделі скористаємося ступеневою моделлю (2).

На середніх частотах похибка переходу зі змінної на постійну напруги зумовлена термоелектричними ефектами Пельтьє і Томсона, які приводять до асиметричного розподілу температури нагрівача термоперетворю-

вача по його довжині. Не маючи змоги в готовому виробі розділити ці два ефекти врахуємо їх сукупну дію.

Для визначення цієї характеристики, яка у загальному випадку є для нас невідомою, було взято декілька поточних значень функції, отриманих експериментально підчас дослідження реальної характеристики. Використовуючи інтерполяційні поліноми визначимо за методом Лагранжа залежність,яку представимо у вигляді полінома другого порядку. Вона матиме деяке відхилення від реальної залежності. Недоліком такого зведення реальної залежності до поліноміальної є виникнення похибок апроксимації, що будуть залежати від вибору вузлових точок для здійснення інтерполяції (рис. 1).

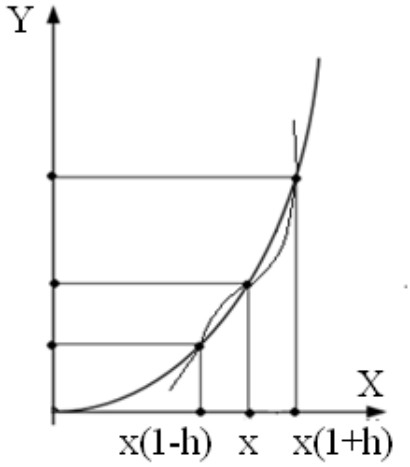


Рис. 1. Вибір вузлових точок для здійснення інтерполяції

Чим меншим буде інтервал Δx, тим ближчі будуть розташовані експериментальні точки і тим точніше буде знайдена залежність на інтервалі $x(1\pm h)$, де $h=\frac{\Delta x}{x}$ – відносний інтервал зміщення реперних точок.

Отримані рівняння повинні бути незалежними, це можливо при віддаленні реперних точок. Якщо h=0, то визначити поліноміальну характеристику буде неможливо. Але, з другого боку, при віддаленні реперних точок збільшується похибка апроксимації в інтервалі між реперними точками. Також існує проблема точного визначення положення реперних точок. В математиці значення реперних точок вважаються ідеальними, тобто такими, що були знайдені без похибок. А на практиці підчас знаходження значень вхідної і вихідної величини присутні похибки, що і визначають неточність знаходження реперних точок. Тому метою дослідження є:

– встановлення залежності похибки апроксимації на інтервалах між реперними точками а також за її межами від інтервалу ±h;

- находження значень похибок коефіцієнтів поліноміальної моделі при наявності випадкової складової вимірювання координат реперних точок в залежності від інтервалу ±h;
- визначення меж екстраполяції за умови рівності похибки екстраполяції та максимальної похибки інтерполяції;
- встановлення залежності похибки знаходження коефіцієнтів апроксимації від похибок знаходження значень вхідної та вихідної величини;
- визначення похибки розв'язку апроксимуючого рівняння в залежності від похибки визначення коефіцієнтів поліноміальної моделі.

1. Залежність похибки апроксимації на інтервалах між реперними точками, а також за її межами від інтервалу ±h. Визначення меж екстраполяції

Під час реальних досліджень аналіз точної неперервної характеристики є практично неможливим. Для квадратичної апроксимації необхідно мати три вхідні та три вихідні величини на характеристиці досліджуваного ПНТЕ.

Таблиця 1.

Значення реперних точок

x	x–Δx	x	x+Δx
y	y(x–Δx)	y(x)	y(x+Δx)

Для дослідження за ідеальні було взято такі залежності: $y_{ideal} = x^{1.8}$, $y_{ideal} = x^{1.9}$, $y_{ideal} = x^{2.1}$ і $y_{ideal} = x^{2.2}$ та розглянуто похибки апроксимації для кожної з них окремо. Похибки апроксимації досліджені при таких відхиленнях h: 50%, 10%, 5%, 3%, 1%, 0.5%.

Рівняння апроксимуючого полінома можна визначити за допомогою методу найменших квадратів (далі МНК), а також за допомогою методу Лагранжа для детермінованих значень. Миттєві значення апроксимуючого поліному будуть точно співпадати зі значенням ідеального полінома в зазначених точках, але будуть різнитись в інших точках інтервалу інтерполяції. Максимальне значення такої різниці, яке буде визначати абсолютну похибку в масштабі вихідної величини визначається наступним чином:

$$\Delta_{y_{\max}} = \left| y_{polinom} - y_{ideal} \right|. \qquad (3)$$

Тоді значення відносної похибки визначається за формулою:

$$\delta_{y_{\max}} = \left| \frac{y_{polinom} - y_{ideal}}{y_{ideal}} \right|. \qquad (4)$$

Для оцінки $\delta_{y_{\max}}$ взято значення по модулю, тому що $\delta_{y_{\max}}$ змінює свій знак, що можна побачити на рис. 1. Як показав аналіз отриманих результатів (рис. 2),що були отримані для ідеальної залежності $y_{real} = x^{1.8}$ та представлені у логарифмічній шкалі, чим меншим буде інтервал δ, тим меншою буде абсолютна похибка відхилення значень апроксимуючого поліному від реальної характеристики. Задовільним значенням похибки $\delta_{\max}$ є значення близьке до 10ppm, що відповідає інтервалу h=3%, де ppm– відносне значення похибки, що складає 10^{-6} або 10^{-4} % та використовується для найбільш прецизійної техніки.

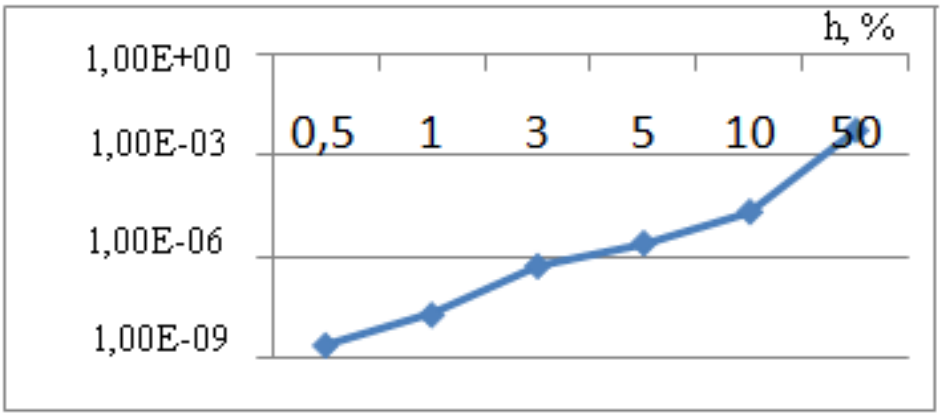


Рис. 2. Графічне представлення залежності величини максимального значення похибки апроксимації від значення величини інтервалу h

Проаналізуємо можливість розширення інтервалу апроксимації шляхом екстраполяції. Тобто визначимо при яких значеннях x в межах $x(1-h) \geq x \geq x(1+h)$ відхилення ідеальної характеристики від поліноміальної, отриманої шляхом інтерполяції, не перевищуватиме $\Delta_{y_{\max}}$ для кожного інтервалу [x(1– h); x(1+h)]. В якості прикладу наведемо графічне зображення результатів моделювання залежності модуля відхилення апроксимуючого поліному та реальної характеристики $y_{real} = x^{1.8}$ від значень x при значення відхилення h=3% на рис. 3, а також відобразимо можливе розширення інтервалу екстраполяції.

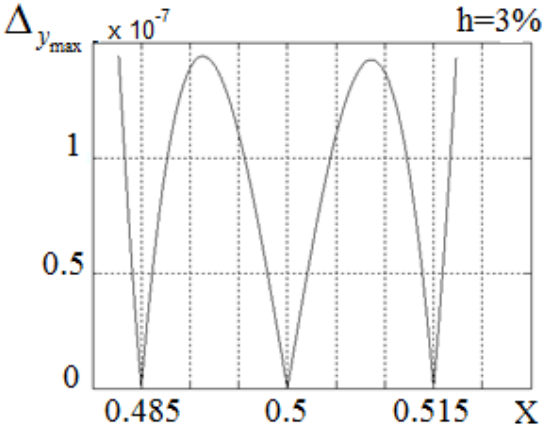


Рис. 3. Залежність модуля відхилення апроксимуючого поліному та реальної характеристики від значень x

2. Визначення значень похибок коефіцієнтів поліноміальної моделі при наявності випадкової складової вимірювання координат реперних точок в залежності від інтервалу ±h. Визначення меж екстраполяції

Підчас реальних досліджень аналіз точної неперервної характеристики є практично неможливим. Рівняння апроксимуючого поліному визначається, використовуючи інтерполяційні поліноми Чебишева. Значення знайденого полінома будуть максимально наближеними до значень реального полінома в реперних точках, але будуть різнитись в інших точках інтервалу інтерполяції. Як і при попередньому дослідженні, метою даного дослідження є вибір такого інтервалу h, при якому отримана характеристика перетворення є максимально наближеною до реальної, встановлення залежності похибки апроксимації на інтервалах між реперними точками а також за її межами від інтервалу ±h, аналіз впливу шумової складової сигналу на результат вимірювання та похибку апроксимації.

Для визначення впливу неточності знаходження реперних точок на визначення коефіцієнтів апроксимуючого поліному промоделюємо ситуацію вимірювання трьох значень (табл. 1), підчас якого значення кожної з трьох реперних точок вимірюються 10 разів. На ідеальну характеристику накладено шум, розподілений за нормальним законом в межах 10^{-7}.

Для проведення дослідження обирається початкова реперна точку на вісі x, та провадяться 10 вимірювань значення x для зменшення впливу випадкової складової на результат обчислень. Для інших реперних точок, що знаходяться зліва і справа від реперної точки, взято відхилення h на ±50%, 10%, 5%, 3%, 1%, 0.5%, і також проведено 10 вимірювань кожного з значень реперних точок. Використовуючи ортогональні многочлени Че-

бишева для апроксимації функції, можливо знайти значення коефіцієнтів a_2, a_1, a_0 поліноміальної моделі $y_{polinom} = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$. Отримавши вираз для поліноміальної моделі, та маючи вираз для реальної моделі можна дослідити абсолютне максимальне відхилення на інтервалах між реперними точками (формули 3, 4)

Для оцінки $\delta_{y_{\max}}$ беремо значення по модулю, тому що $\delta_{y_{\max}}$ змінює свій знак, що можна побачити на рис. 1. Як показав аналіз отриманих результатів (рис. 4), що мали місце для ідеальної залежності $y_{real} = x^{1.8}$ при наявності випадкової складової вимірювань координат реперних точок і були представлені у логарифмічній шкалі, чим меншим буде інтервал δ, тим меншою буде абсолютна похибка відхилення значень апроксимуючого поліному від реальної характеристики. Але задовільним значенням похибки $\delta_{\max}$ є значення близьке до 10ppm, що відповідає інтервалу h=3%.

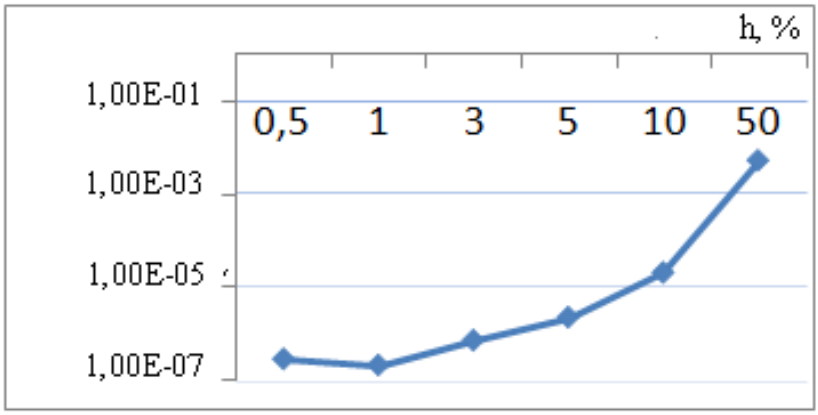


Рис. 4. Графічне представлення залежності величини максимального значення похибки апроксимації від значення величини інтервалу h

Проаналізуємо можливість розширення інтервалу апроксимації шляхом екстраполяції. Тобто визначимо при яких значеннях x в межах $x(1-h) \geq x \geq x(1+h)$ відхилення ідеальної характеристики від поліноміальної, отриманої шляхом інтерполяції, не перевищуватиме $\Delta_{y_{\max}}$ для кожного інтервалу [x(1– h); x(1+ h)]. В якості прикладу наведемо графічне зображення результатів моделювання залежності модуля відхилення апроксимуючого поліному та реальної характеристики $y_{real} = x^{1.8}$ від значень x при значення відхилення h=3% на рис. 5, а також відобразимо можливе розширення інтервалу екстраполяції.

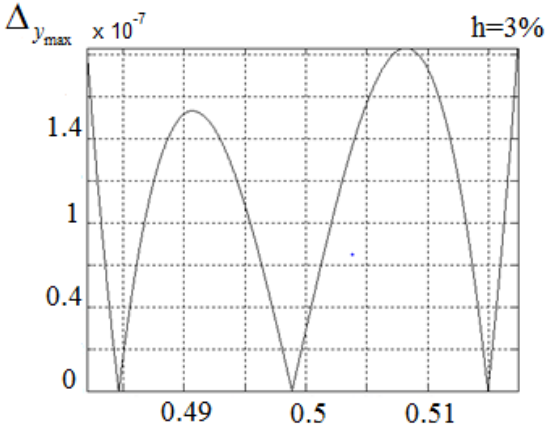


Рис. 5. Залежність модуля відхилення апроксимуючого поліному та реальної характеристики від значень x

Для уточнення коефіцієнтів поліноміальної моделі на реперні точки ідеальної характеристики адитивно накладається випадкові відхилення, розподілені по рівномірному закону з відносним значенням від 10^{-9} до 10^{-3}. Попередні дослідження були проведені для рівня шуму 10^{-7}. Проаналізувавши як залжить максимальна похибка апроксимації від рівня присутнього шуму та величини інтревала h зроблено висновок, що величина максимального абсолютного відхилення поліноміальної моделі від реальної маже лінійно залежить від величини присутнього шуму. Таким чином, маючи залежність трьох параметрів: величини віддалення реперних точок h, рівня шуму та максимальної абсолютної похибки апроксимації, наведемо в якості прикладу на рис. 6 тривимірний графік залежності всіх показників для випадку, коли реальна характеристика має вигляд $y_{real} = x^{1.8}$. На вісі X графіка знаходиться величина інтервалу h, на вісі У абсолютна максимальна похибка апроксимації, на вісі Z рівень досліджуваного шуму.

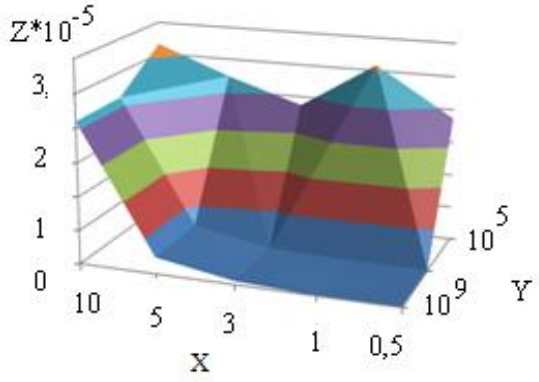


Рис. 6. Росподіл похибки апроксимації залежно від рівня шуму та роствору h для $y_{ideal} = x^{1.8}$

3. Встановлення залежності похибки знаходження коефіцієнтів апроксимації від похибок знаходження значень вхідної та вихідної величини

Через присутність у нагрівачі ефектів Томпсона і Пельтьє модель ПНТЕ не матиме ідеальної квадратичної залежності та буде представлена виразом:

$$y(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

Також необхідно врахувати те, що ліва та права гілки параболи будуть не однаковими, тому необхідно розглядати модель для лівої та правої гілки окремо:

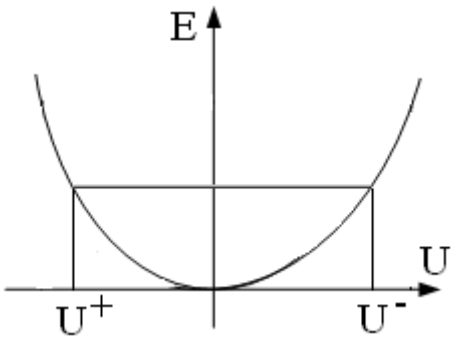


Рис. 7 Розбіжність лівої та правої гілок характеристики термоперетворювача

Для визначення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 необхідно мати три пари значень вхідної та вихідної величини. Дослідимо вплив неточності вимірювання значень x та $y(x)$ на похибку визначення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2. Для цього розглянемо випадок для додатної вхідної величини. Для цього нам необхідно три пари значень: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

Для знаходження коефіцієнтів полінома, a_0, a_1, a_2 складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1, \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2, \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 = y_3. \end{cases}$$

Матричне рівняння цієї системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x^2{}_1 \\ 1 & x_2 & x^2{}_2 \\ 1 & x_3 & x^2{}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження кожного коефіцієнта a_0, a_1, a_2 скористаємось визначниками. Коефіцієнти a_0, a_1, a_2 є відношенням двох визначників, тобто:

$$a_0 = \frac{D_{a0}}{D_c},\ a_1 = \frac{D_{a1}}{D_c},\ a_2 = \frac{D_{a2}}{D_c},$$

де D_c – визначник систем, D_{a0}, D_{a1} та D_{a2} визначники, отримані шляхом заміни першого, другого та третього стовпчика визначника системи стовпчиком правої частини матричного рівняння, відповідно.

Тобто:

$$D_c = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix};\ D_{a0} = \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & x_2 & x_2^2 \\ y_3 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix};\ D_{a1} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & x_1^2 \\ 1 & y_2 & x_2^2 \\ 1 & y_3 & x_3^2 \end{vmatrix};\ D_{a2} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Повна відносна похибка коефіцієнтів знаходиться за формулами:

$$\delta_{a_0} = \frac{\partial_{Da0} - \partial_{D_C}}{1 + \partial_{D_C}},\ \delta_{a_1} = \frac{\partial_{Da1} - \partial_{D_C}}{1 + \partial_{D_C}},\ \delta_{a_2} = \frac{\partial_{D_{a2}} - \partial_{D_C}}{1 + \partial_{D_C}}.$$

де $\delta_{Da0}, \delta_{Da1}, \delta_{D_{a2}}, \delta_{D_C}$ є відносними похибками визначників $D_{a0}, D_{a1}, D_{a2}, D_C$ відповідно.

Відносна похибка визначника є відношенням його абсолютної похибки до номінального значення:

$$\delta \mathrm{D}_{\mathrm{a0}} = \frac{\Delta D_{a0}}{D_{a0}},\ \delta \mathrm{D}_{\mathrm{a1}} = \frac{\Delta D_{a1}}{D_{a1}},\ \delta \mathrm{D}_{\mathrm{a2}} = \frac{\Delta D_{a2}}{D_{a2}},\ \delta \mathrm{D}_{\mathrm{C}} = \frac{\Delta D_C}{D_C}.$$

де $\Delta D_{a0}, \Delta D_{a1}, \Delta D_{a2}, \Delta D_C$ – абсолютні похибки визначників;

$D_{a0}, D_{a1}, D_{a2}, D_C$ – номінальні значення визначників.

Абсолютні похибки визначників знаходимо підставляючи їх, як суму визначників $k^{-го}$ порядку похибки [6]. Враховуючи тільки похибки першого порядку малості, отримаємо:

$$\Delta D_{a0} = \begin{vmatrix} \Delta y_1 & x_1 & x_1^2 \\ \Delta y_2 & x_2 & x_2^2 \\ \Delta y_3 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & \Delta x_1 & x_1^2 \\ y_2 & \Delta x_2 & x_2^2 \\ y_3 & \Delta x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 2x_1\Delta x_1 \\ y_2 & x_2 & 2x_2\Delta x_2 \\ y_3 & x_3 & 2x_3\Delta x_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta D_{a1} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta y_1 & x_1^2 \\ 1 & \Delta y_2 & x_2^2 \\ 1 & \Delta y_3 & x_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y_1 & 2x_1\Delta x_1 \\ 1 & y_2 & 2x_2\Delta x_2 \\ 1 & y_3 & 2x_3\Delta x_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta D_{a2}=\begin{vmatrix}1 & \Delta x_1 & y_1\\ 1 & \Delta x_2 & y_2\\ 1 & \Delta x_3 & y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_1 & \Delta y_1\\ 1 & x_2 & \Delta y_2\\ 1 & x_3 & \Delta y_3\end{vmatrix},$$

$$\Delta D_C=\begin{vmatrix}1 & \Delta x_1 & x_1^2\\ 1 & \Delta x_2 & x_2^2\\ 1 & \Delta x_3 & x_3^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_1 & 2x_1\Delta x_1\\ 1 & x_2 & 2x_2\Delta x_2\\ 1 & x_3 & 2x_3\Delta x_3\end{vmatrix}.$$

Абсолютні похибки визначників, виражені через відносні похибки вимірювань мають такий вигляд:

$$\Delta D_{a0}=\begin{vmatrix}\delta y_1 y_1 & x_1 & x_1^2\\ \delta y_2 y_2 & x_2 & x_2^2\\ \delta y_3 y_3 & x_3 & x_3^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1 & \delta x_1 x_1 & x_1^2\\ y_2 & \delta x_2 x_2 & x_2^2\\ y_3 & \delta x_3 x_3 & x_3^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1 & x_1 & 2\delta x_1 x_1^2\\ y_2 & x_2 & 2\delta x_2 x_2^2\\ y_3 & x_3 & 2\delta x_3 x_3^2\end{vmatrix},$$

$$\Delta D_{a1}=\begin{vmatrix}1 & \delta y_1 y_1 & x_1^2\\ 1 & \delta y_2 y_2 & x_2^2\\ 1 & \delta y_3 y_3 & x_3^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & y_1 & 2\delta x_1 x_1^2\\ 1 & y_2 & 2\delta x_2 x_2^2\\ 1 & y_3 & 2\delta x_3 x_3^2\end{vmatrix},$$

$$\Delta D_{a2}=\begin{vmatrix}1 & \delta x_1 x_1 & y_1\\ 1 & \delta x_2 x_2 & y_2\\ 1 & \delta x_3 x_3 & y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_1 & 2\delta x_1 x_1^2\\ 1 & x_2 & 2\delta x_2 x_2^2\\ 1 & x_3 & 2\delta x_3 x_3^2\end{vmatrix},$$

$$\Delta D_C=\begin{vmatrix}1 & \delta x_1 x_1 & x_1^2\\ 1 & \delta x_2 x_2 & x_2^2\\ 1 & \delta x_3 x_3 & x_3^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_1 & 2\delta x_1 x_1^2\\ 1 & x_2 & 2\delta x_2 x_2^2\\ 1 & x_3 & 2\delta x_3 x_3^2\end{vmatrix}.$$

Якщо $\delta x_1=\delta x_2=\delta x_3=\delta x$, то:

$\Delta D_{a0}=(\delta y+3\delta x)D_{a0}$, $\Delta D_{a1}=(\delta y+2\delta x)D_{a1}$, $\Delta D_{a2}=(\delta y+\delta x)D_{a2}$, $\Delta D_c=3\delta x\cdot D_c$

За виконання вище зазначених умов, а саме однакових відносних похибок вимірювання для всіх x , отримаємо вирази для визначення відносних похибок визначників:

$$\delta_{D_{a0}}=\frac{\Delta D_{a0}}{D_{a0}}=\delta y+3\delta x,\quad \delta_{D_{a1}}=\frac{\Delta D_{a1}}{D_{a1}}=\delta y+2\delta x,\quad \delta_{Da2}=\frac{\Delta D_{a2}}{D_{a2}}=\delta y+\delta x,$$

$$\delta_{DC}=\frac{\Delta D_C}{D_C}=3\delta x.$$

Таким чином ми можемо визначити вирази шуканих похибок визначення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2,

$$\delta_{a0} = \frac{\delta y}{1+3\delta x};\ (4) \qquad \delta_{a1} = \frac{\delta y - \delta x}{1+3\delta x};\ (5) \qquad \delta_{a2} = \frac{\delta y - 2\delta x}{1+3\delta x}.\ (6)$$

Знаючи, що вхідна величина x визначається напругою та вимірюється мультиметром HP3458A, похибка вимірювання вхідної величини знаходиться в діапазоні 1÷10 ppm, який відповідає діапазону присутньої похибки приладу. Вихідна величина y визначається виміряною термоелектрорушійною силою ТЕРС та вимірюється нановольтметром HP34420A, похибка вимірювання вихідної величини знаходиться в діапазоні (5÷20) ppm, який відповідає діапазону присутньої похибки приладу.

Графічне відображення залежності похибки знаходження коефіцієнтів апроксимуючого поліному (4, 5, 6) від величини похибок знаходження значень вхідної та вихідної величини знаходяться на рисунку 8. На вісі x кожного з графіків знаходяться значення похибки вихідної величини δy, [ppm]. На вісі y кожного з графіків знаходяться значення похибки вхідної величини δx [ppm]. На вісі z знаходяться значення отриманої похибки знаходження коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 апроксимуючого поліному $a_2x^2 + a_1x + a_0$ для кожного з графіків, відповідно.

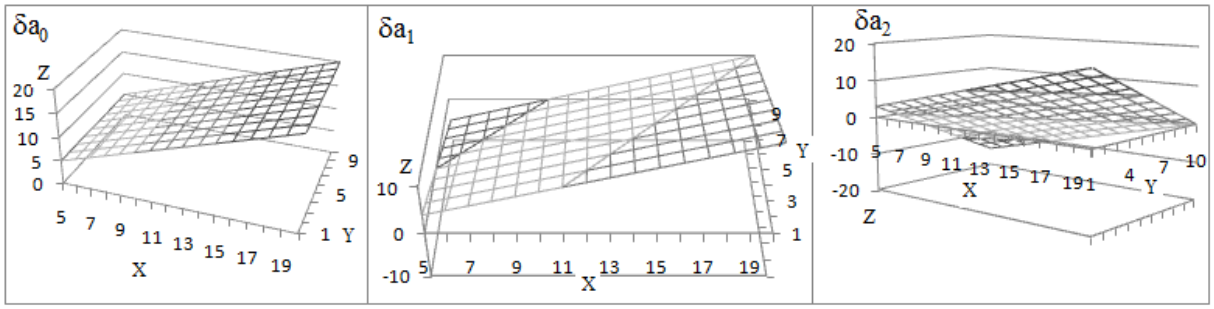


Рис. 8. Графік розподілу залежності похибки знаходження коефіцієнтів апроксимуючого поліному від значення похибок вимірювання вхідної δx та вихідної δy величини

Виходячи з отриманих даних ми можемо сформувати вимоги до точності приладів, що вимірюють вхідні та вихідні величини термоперетворювачів. Значення похибки знаходження коефіцієнта a_0 полінома $a_2x^2 + a_1x + a_0$ майже не залежить від похибки вимірювання вхідної величини δx та майже лінійно залежить від похибки вимірювання вихідної величини δy. Значення похибки знаходження коефіцієнта a_1 полінома $a_2x^2 + a_1x + a_0$ може компенсуватись повністю, за умови рівності

значень похибок вимірювання вхідної та вихідної величини: δx та δy, відповідно. Значення похибки знаходження коефіцієнта a_2 полінома $a_2x^2 + a_1x + a_0$ може компенсуватись повністю, за умови, коли похибка вимірювання вхідної величини δx є в два рази меншою за значенням похибки вихідної величини δy.

4. Визначення похибки розв'язку апроксимуючого рівняння в залежності від похибки визначення коефіцієнтів поліноміальної моделі

Визначимо формули для знаходження похибок коренів рівняння

$$a_2^+x^2 + a_1^+x + a_0^+ = 0 \text{ та } \quad a_2^-x^2 + a_1^-x + a_0^- = 0,$$

де a_2^+, a_1^+, a_0^+ - коефіцієнти апроксимуючого полінома для додатної гілки параболи, a_2^-, a_1^-, a_0^- - коефіцієнти апроксимуючого полінома для від'ємної гілки параболи.

Як відомо, квадратне рівняння має два корені:

$$x_1^+ = \frac{-a_1^+ + \sqrt{a_1^{+2} - 4a_2^+a_0^+}}{2a_2^+}, \quad x_2^+ = \frac{-a_1^+ - \sqrt{a_1^{+2} - 4a_2^+a_0^+}}{2a_2^+}.$$

В нашому випадку корінь x_2^+ відкидається як такий, що підходить для нереальної від'ємної гілки параболи, тому в подальшому використовується тільки корінь x_1^+, що відповідає реальній характеристиці, точки якої (x^+, y^+) вимірюються для додатної гілки характеристики термоперетворювача і в подальшому знайдений корінь позначається x^+. Аналогічно:

$$x_1^- = \frac{-a_1^- + \sqrt{a_1^{-2} - 4a_2^-a_0^-}}{2a_2^-}, \quad x_2^- = \frac{-a_1^- - \sqrt{a_1^{-2} - 4a_2^-a_0^-}}{2a_2^-}.$$

Корінь x_1^- відкидається як такий, що підходить для нереальної додатної гілки параболи, тому в подальшому використовується тільки корінь x_2^-, що відповідає реальній характеристиці, точки якої (x^-, y^-) вимірюються для додатної гілки характеристики термоперетворювача і в подальшому знайдений корінь позначається x^-.

Користуючись алгебраїчним методом знаходження похибок за похибками складових виразу визначимо вирази для знаходження відносних похибок коренів δx^- та δx^+ наступним чином[6]:

$$\delta x^{+} = \frac{1+\delta a^{+}{}_{2}}{\sqrt{a^{+}{}_{1}^{2} - 4a^{+}{}_{2}a^{+}{}_{0}} - a^{+}{}_{1}} \cdot \left[\sqrt{a^{+}{}_{1}^{2} - 4a^{+}{}_{2}a^{+}{}_{0} + 2\delta a^{+}{}_{1} + \delta a^{+}{}_{1} \cdot \delta a^{+}{}_{1} + \delta a^{+}{}_{2} + \delta a^{+}{}_{0} + \delta a^{+}{}_{2} \cdot \delta a^{+}{}_{0}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{a^{+}{}_{1}^{2} - 4a^{+}{}_{2}a^{+}{}_{0}} - a^{+}{}_{1}\delta a^{+}{}_{1} \right] \mp \frac{\delta a^{+}{}_{2}}{1+\delta a^{+}{}_{2}} \ ,$$

$$\delta x^{-}{}_{2} = \frac{1+\delta a^{-}{}_{2}}{\sqrt{a^{-}{}_{1}^{2} - 4a^{-}{}_{2}a^{-}{}_{0}} + a^{-}{}_{1}} \cdot \left[\sqrt{a^{-}{}_{1}^{2} - 4a^{-}{}_{2}a^{-}{}_{0} + 2\delta a^{-}{}_{1} + \delta a^{-}{}_{1} \cdot \delta a^{-}{}_{1} + \delta a^{-}{}_{2} + \delta a^{-}{}_{0} + \delta a^{-}{}_{2} \cdot \delta a^{-}{}_{0}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{a^{-}{}_{1}^{2} - 4a^{-}{}_{2}a^{-}{}_{0}} + a^{-}{}_{1}\delta a^{-}{}_{1} \right] - \frac{\delta a^{-}{}_{2}}{1+\delta a^{-}{}_{2}},$$

Як згадувалось раніше, моделі правої та лівої гілок параболи не зберігаються (рис. 7), тому є принципово важливим використовувати відповідні формули знаходження похибки для додатних та від'ємних значень виміряної величини. Значення x для додатної та від'ємної гілок параболи та, відповідно, додатних та від'ємних значень вхідної величини, знаходяться окремо. Тобто формули для визначення x^{+} та δx^{+} підходять для додатної гілки параболи, а значення x^{-} та δx^{-} підходять для від'ємної гілки параболи.

Висновки

На середніх частотах похибка переходу зі змінної на постійну напруги зумовлена термоелектричними ефектами Пельтьє і Томсона, які приводять до асиметричного розподілу температури нагрівача термоперетворювача по його довжині. Не маючи змоги в готовому виробі розділити ці два ефекти враховано та досліджено їх сукупну дію. Використовуючи методи апроксимації, в запропонованій статті було досліджено вплив вибору реперних точок та точності визначення реперних точок на точність знаходження коефіцієнтів реальної моделі термоперетворювача, наведені та проаналізовані аналітичні вирази для встановлення залежності похибки знаходження коефіцієнтів апроксимації від похибок знаходження значень вхідної та вихідної величини, а також визначені вирази для знаходження похибки розв'язку апроксимуючого рівняння в залежності від похибки визначення коефіцієнтів поліноміальної моделі.

Список використаної літератури

1. *Величко О. М., Мухаровський М. Я.* Фізичні величини та їх одиниці: довідковий посібник / ДП "Всеукр. держ наук.-вироб. центр стандартизації, метрології, сертифікації та захисту прав споживачів". - Київ : Основа, 2004. - 248 с. ; - ISBN 966-699-072-5
2. *Захаров И. П., Павленко Ю. Ф.* Воспроизведение единиц электрических величин [Текст]: учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений /

Науч.-метод. центр высш. образования. Харьк. нац. ун-т радиоэлектроники. - Х. : [б. и.], 2004. - 175 с. - ISBN 966-659-080-8
3. *M. Klonz*. CCE Comparison of AC-DC Voltage Transfer Standards at the Lowest Attainable Level of Uncertainty. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement,–1997. –№ 2, Vol. 46. – С. 342-346.
4. *Miller P., Morre D.* Precision voltage reference[J], Analog Application Journal,Texas-Instruments Inc, –1999. – №3. – С. 1-4.
5. *Туз Ю. М., Серпилін К. Л., Гапченко Л. М.* Електронні вольтметри змінного струму (основи проектування) – Київ: Техніка, 1970, -180 с.
6. *Памуро В. И.* Анализ радиоцепей и их схемной надежности. –Київ: Техніка, 1967.–150С.

УДК 519.222

Е. Т. Володарский, Н. А. Рековец

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПРИЕМЛЕМОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ ДОРОГОСТОЯЩИХ УНИКАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Введение

Качество изделия оценивается в процессе проведения испытаний. Для обеспечения надежности получаемых результатов стремятся увеличить объем выборки экспериментальных данных полученных в неизменимых условиях, что в [1] названы условиями повторяемости. Однако существует целый ряд объектов, для которых получение выборок больших объемов невозможно (испытания с разрушением иле нецелесообразно, когда трудоемкость и длительность испытаний требует поддержания условий повторяемости больших материальных и финансовых затрат. Исходя из того, что в любом случае по результатам испытаний необходимо принимать обоснованное решение о состоянии объекта, ищут компромисс между имеющимся ограниченным объемом экспериментальных данных и надежностью принимаемых решений. Отправной точкой при проведении анализа является то, что измерение выполняют в точном соответствии со стандартным методом измерений, стандартные отклонения которого известны.

При этом если абсолютные расхождения двух имеющихся результатов измерений находиться в пределах повторяемости метода $r = 2.8\sigma_r$ (где σ_r – СКО повторяемости), то можно с вероятностью 0.95 утверждать, что это расхождение обусловлено влиянием только случайных величин, и в

качестве оценки выходной величины следует принимать среднее значение этих двух полученных результатов [2]. Если абсолютное расхождение превышает пределы повторяемости r, то необходимо провести третье измерение входной величины и рассмотреть расхождения между двумя крайними результатами $|x_{\max} - x_{\min}|$, которое сравнивается с границами критического диапазона [1]:

$$CR_{0.95}(n=3) = f(n) \cdot \sigma_r,$$

где $f(n)$ – коэффициент критического диапазона [3].

Если абсолютное расхождения находиться в пределах критического диапазона $CR_{0.95}(3)$, то как и для случая с двумя результатами наблюдения, необходимо в качестве оценки измеряемой величины следует брать среднее из трех значений. В противном случае, если нет возможности провести дополнительный четвертый опыт, в качестве оценки измерительной величины [1] рекомендует использовать медиану. Такая ситуация довольно часто встречается на практике, когда рекомендуется воспользоваться тремя результатами и тут стоит задача: или говорить о непригодности объекта, или все таки оценить значение измерительной величины, что позволит на следующее этапе принять обоснованное решение.

Существует несколько статистических методов оценивания медианы. Целью исследования является разработка рекомендаций о приемлемости методов оценивания результатов испытаний в зависимости от расположения значений выборки из трёх элементов.

Основная часть

В качества оценки полученных результатов можно использовать выборочную медиану или значение медианы, рассчитанное по Гаствирту или Ходжесу-Леману [4].

Для расчета выборочной медианы все результаты располагаются по возрастанию $x_1 \le x_2 \ldots \le x_j \ldots \le x_{m-1} \le x_m$.

Выборочную медиану рассчитывают по формулам (1, 2)

$$\tilde{x} = \frac{x_{n/2} + x_{(n/2+1)}}{2}, \quad n - \text{четное} \tag{1}$$

$$\tilde{x} = x_{(n+1)/2}, \quad n - \text{нечетное} \tag{2}$$

Для выборки результатов с большой асимметрией в качестве значения аттестационной характеристики рекомендуется применять медиану по Гаствирту:

$$x_G = X_{Gastwirt} = 0.4 \cdot \tilde{x} + 0.3 \cdot (x_{T_B} + x_{T_H}),$$

где $\tilde{x}$ – выборочная медиана упорядоченного по возрастанию ряда результатов, рассчитанная по формулам(1, 2);

x_{T_B} и x_{T_H} - члены этого ряда с порядковыми номерами T_B и T_H;

Нижнее значение T_H рассчитывается по формуле (3):

$$T_H = \frac{n}{3} + 1 - \text{(округляют до нижнего целого числа)} \qquad (3)$$

Верхнее значение T_B рассчитывается по формуле (4):

$$T_B = \frac{3}{4} n - \text{(округляют до верхнего целого числа)} \qquad (4)$$

Для выборки результатов малого объема в качестве значения аттестационной характеристики рекомендуется применять медиану по Ходжесу-Леману. Из членов ряда образуют все возможные комбинации вида(5):

$$Z_{(k)} = \frac{1}{2}\left[x_{(i)} + x_{(j)} \right] \qquad (5)$$

где $i = 1,2...n,\ j = 1,2...n,\ k = 1,2...N.$

Общее число полусумм $N = \frac{1}{2} n(n+1)$

Полученный ряд (Z_k) упорядочивают по возрастанию

$$Z_{(1)} \le Z_{(2)} ... \le Z_{(N)}$$

В качестве значения аттестационной характеристики применяют медиану

$$x_{H-L} = X_{Hodges-Lehmann} = \frac{Z_{(N/2)} + Z_{(N/2+1)}}{2}, \ (N \text{ – нечетное});$$

$$x_{H-L} = X_{Hodges-Lehmann} = Z_{\frac{N+1}{2}} \qquad (N \text{ – нечетное}).$$

Был проведен моделирующий эксперимент, где одно из выборочных значений находится за пределами 2σ (уровень доверительной вероятность $P = 95\%$) геометрическая интерпретация которого приведена на рис. 1.

В пакете MatLab была смоделирована выборка из 3 значений с заданным математическим ожиданием M и стандартным квадратическим отклонением σ. При моделировании было предусмотрено, что один результат выходит за границы $M + 2\sigma$.

При анализе были введены величины, которые характеризуют «расстояния» между значениями выборки $L_1 = x_2 - x_1$, а $L_2 = x_3 - x_2$, где $x_1, x_2 < x_3$. По результатам моделирования были получены графики (рисунок 2), которые отображают зависимость медианы (или среднего значения) от соотношения расстояний L_1 / L_2. На график выводиться только те полученное значения, которые имеет минимальное отклонение от математического ожидания.

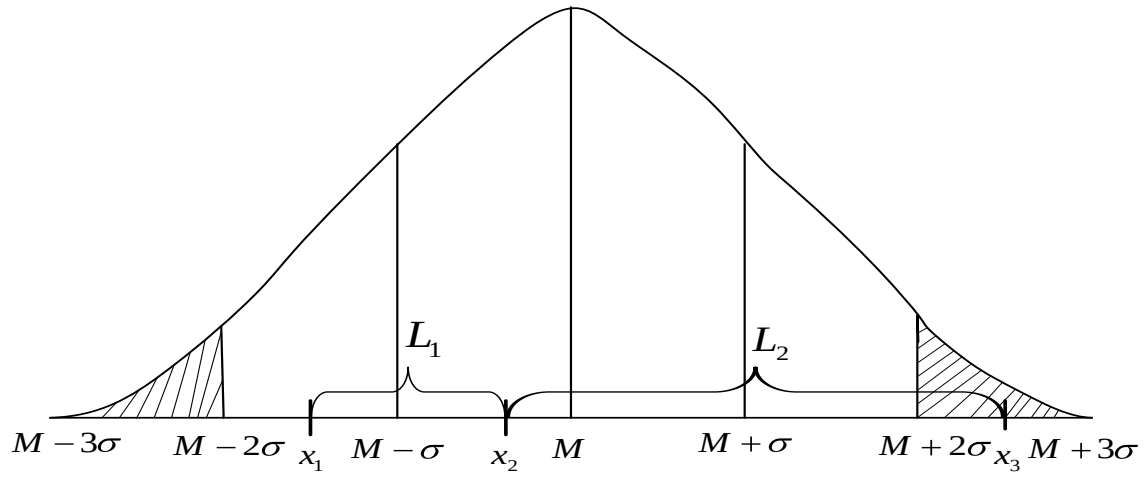


Рис. 1. Распределение значений выборки

При математическом ожидании равном $M = 5$ и среднеквадратическом отклонение $\sigma = 2$ и значениях выборки следующие $x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = 9.9$, значения $L_1 = 1,\ L2 = 6.9$. Вычислим по выше приведенным формулам среднее значение $\overline{x}$ =4.967, выборочную медиану $\tilde{x} = 3$, медиану по Ходжесу-Леману $x_{\text{Hodges-Lehmann}} = 4.475$, и медиану по Гаствирту $x_{\text{Gastwirth}} = 5.07$. Видно, что в данном случае наиболее точным является вычисления медианы по Гаствирту. Используя данный подход, были получены графики, приведенные на рис. 2.

На основание полученных данных были выведены соотношения, которые позволяют выбрать приемлемый результат при заданных условиях (см. табл. 1).

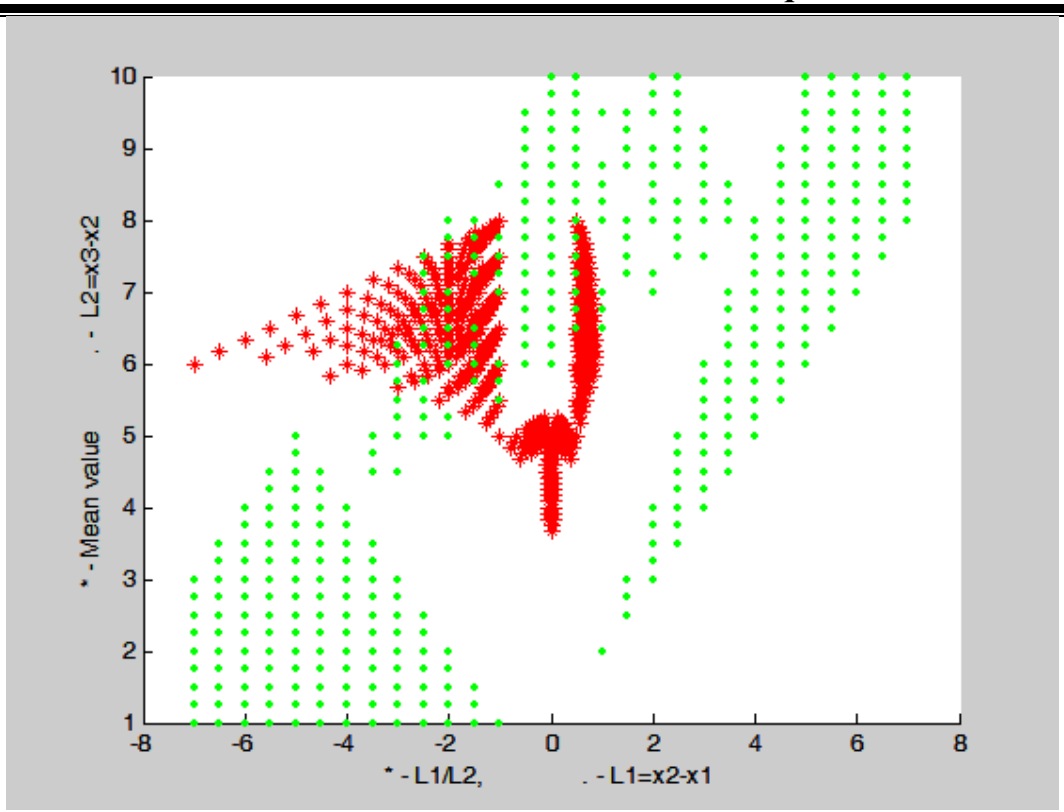


Рис. 2, *а.* Окончательный результат – среднее значение

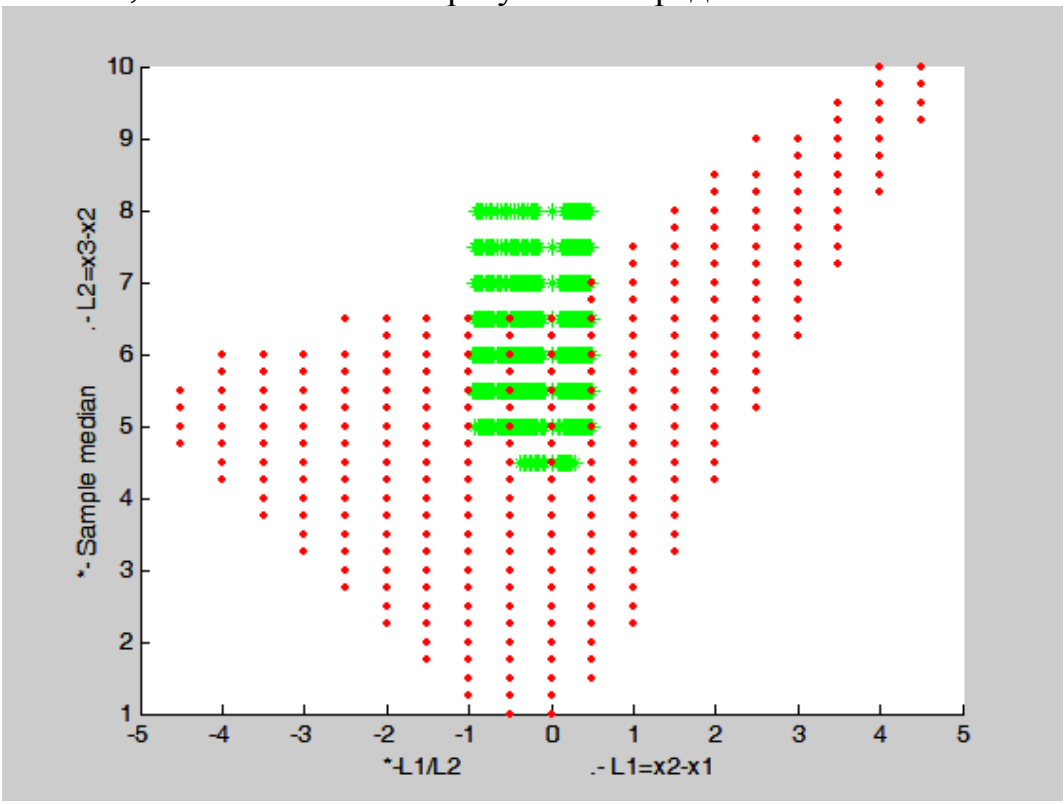


Рис. 2,*б.* Окончательный результат - выборочная медиана

Рис. 2. Результаты моделирования

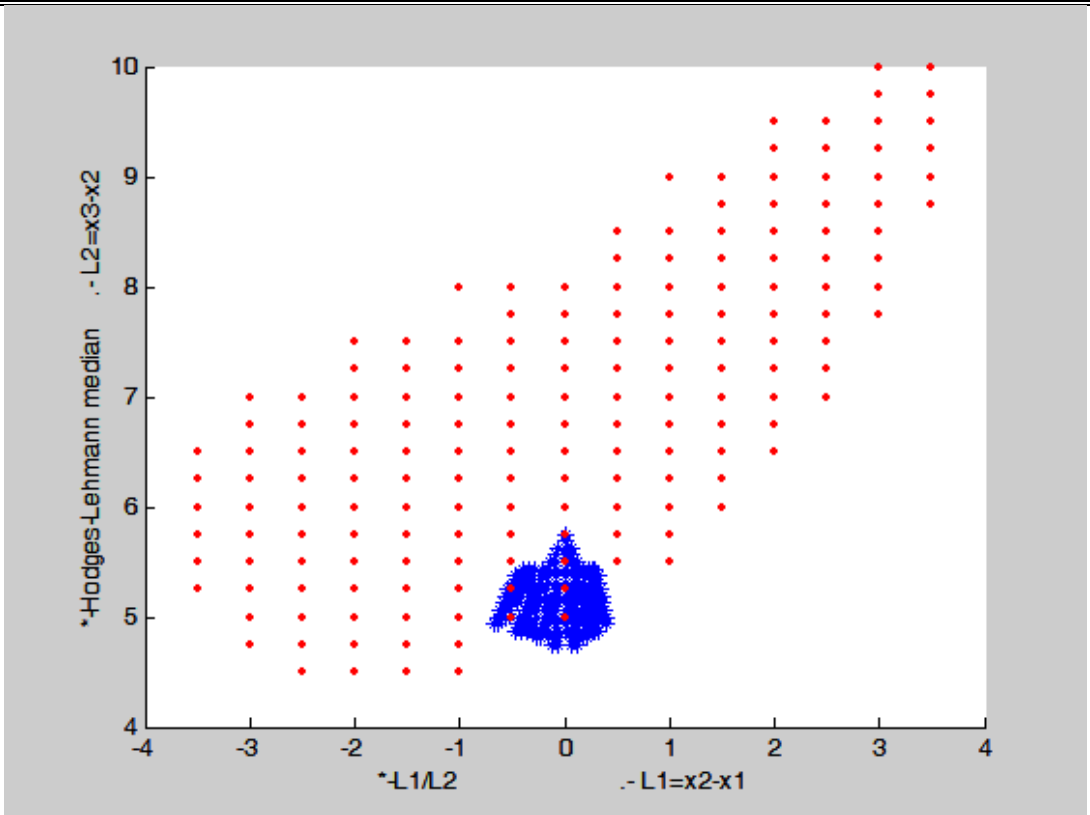


Рис. 2, *в.* Окончательный результат – медиана по Ходжесу-Леману

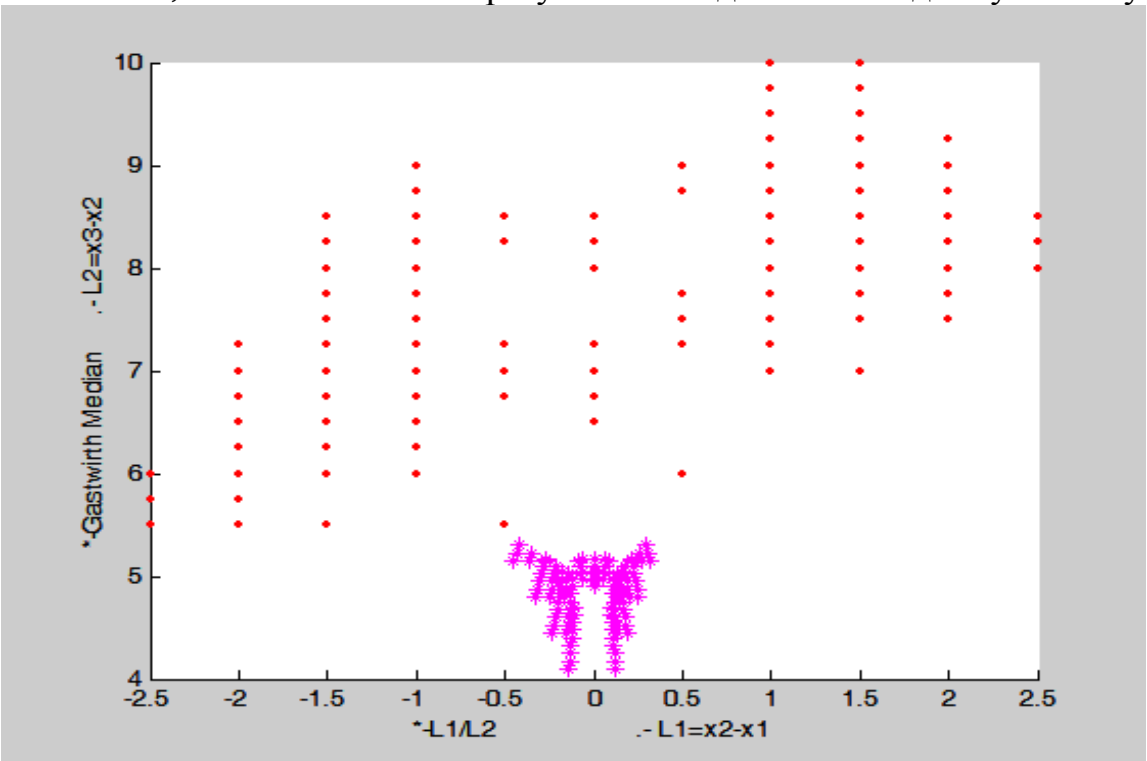
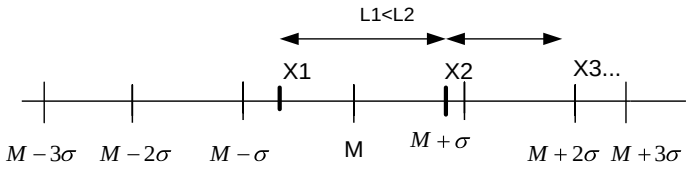
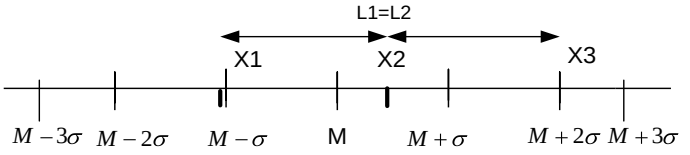
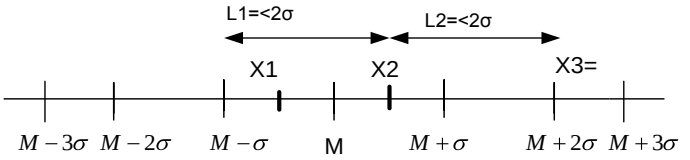
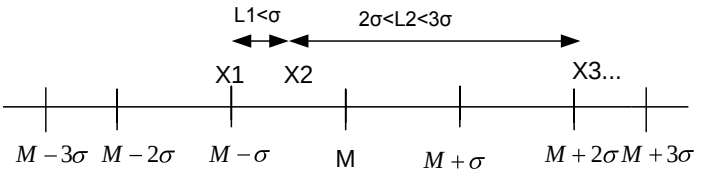
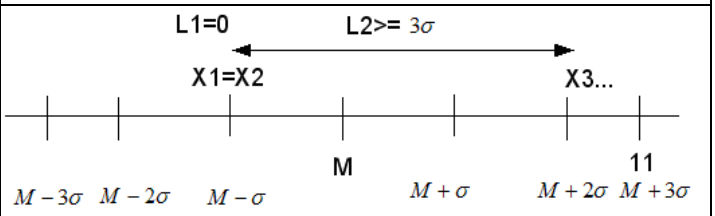
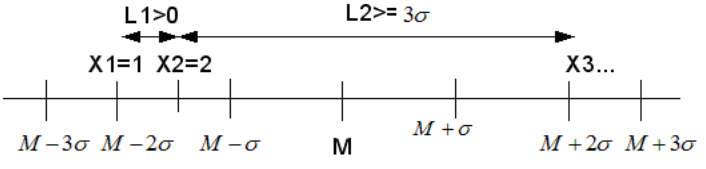


Рис. 2, *г.* Окончательный результат – Медиана по Гаствиту

Рис. 2. Результаты моделирования

Таблица 1.

Выбор приемочного результата, при объеме выборки $n = 3$

	$\overline{x}$	$\tilde{x}$	x_{H-L}	x_G	**L1=|x2-x1| L2=|X3-X2|,** где **X3>2σ**
L1/L2>1	+	-	-	-	
L1=L2	+	+	+	+	
L1/L2<1 L1≤2σ u L2≤2σ	-	+	-	-	
L1/L2<<1 L1<2σ u L2>2σ	-	-	+	-	
L1/L2<<1 L1=0 u L2≥3σ	+	-	-	-	
L1/L2<<1 0<L1≤σ u L2≥3σ	-	-	-	+	

Выводы

В данной статье предложены оптимальные методы оценки результата при проведение дорогостоящих измерений. Показано, что, если нельзя принять модель определенного типа распределения, используют статистические модели, не требующие знания характеристики распределения.

Обоснована возможность использования в качестве оценки выходной величины не только среднего значения выборки и выборочной медианы, но и медианы по Гаствирту и Ходжесу-Леману, которые при определенных условиях дают более точные оценки, даже для случаев, когда один из результатов выборки находится вне критической зоны.

Зависимости и закономерности, полученные в ходе данного исследования, играют очень важную роль, при оценке приемлемости результатов дорогостоящих уникальных объектов.

Список использованной литературы

1. *ДСТУ ГОСТ ISO 5725-6:2005* Точність (правильність і прицізійність) методів та результатів вимірювання. Частина 6. Використання показників точності на практиці, -С.2-10
2. *Володарський Є. Т., Кошова Л. О.* Статистична обробка даних, -К. Книжкове товариство Національного авіаційного університету, 2008-31-32с.
3. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики, М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983 -13,136 с.
4. *ГОСТ 27827-88* Стандартные образцы. Методика изготовления и аттестации стандартных образцов состава горнах пород и минерального сырья, М.- Издательства стандартов, 15-17с.

УДК 004.67: 681.518.5

А. С. Шантырь

СОВМЕЩЕНИЕ ВЫБОРОК ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРИ НЕСИНХРОННЫХ ОТСЧЕТАХ В ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РОТОРНОЙ МАШИНЫ

Введение

Система защиты роторной машины от превышения уровня вибраций в подшипниках основана на контроле среднеквадратического значения (СКЗ) виброизмерительного сигнала $\sigma_y = \sqrt{\mathrm{M}\{y^2(t)\}}$ [1]. Известно, что виброизмерительный сигнал $y(t)$ представляет аддитивную смесь регулярной $s(t)$ и случайной $n(t)$ составляющих

$$y(t) = s(t) + n(t), \qquad (1)$$

регулярная составляющая обусловлена, в основном, прецессией вала [2]. Использование, содержащейся в виброизмерительном сигнале, информации о прецессии вала позволяет улучшить защиту роторной машины путём дополнительного контроля СКЗ регулярной составляющей $\sigma_s = \sqrt{\mathrm{M}\{s^2(t)\}}$.

Постановка задачи

Цель данной статьи – разработка метода измерения интенсивности регулярной составляющей виброизмерительного сигнала и структуры устройства виброконтроля, обеспечивающего защиту роторной машины от превышения уровня прецессии вала ротора.

Обоснование метода измерения интенсивности регулярной составляющей виброизмерительного сигнала

Функциональная схема типового устройства виброконтроля (рис. 1) включает линейный измерительный преобразователь L (усилитель, формирователь амплитудно-частотной характеристики, интегратор и т.п.) входного измерительного сигнала, аналого-цифровой преобразователь (АЦП) устройство определения СКЗ σ_y измеряемого параметра вибрации, пороговое устройство и индикатор.

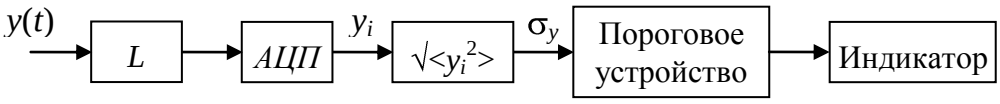


Рис. 1. Функциональная схема типового устройства виброконтроля

Предложенное устройство виброконтроля (рис. 2), в отличие от типового, включает канал селекции и измерения СКЗ σ_s регулярной составляющей $s(t)$ виброизмерительного сигнала $y(t)$.

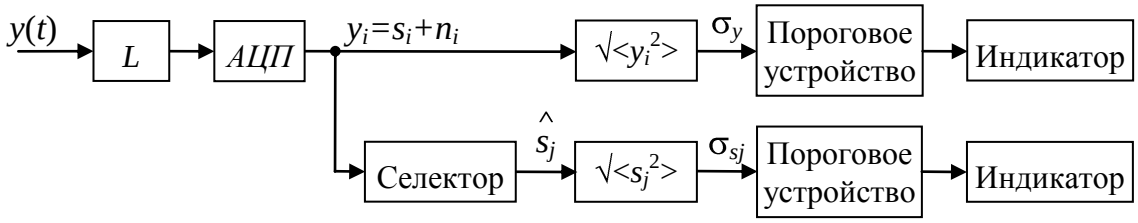


Рис. 2. Функциональная схема устройства виброконтроля с каналом СКЗ уровня прецессии вала

Для селекции регулярной составляющей использовано свойство её периодичности на ограниченных интервалах времени $\Phi_{\text{набл.}}$

$$s(t) = s(t - T),\ t \in \Phi_{\text{набл.}},\ T << \mathrm{T}_{\text{набл.}}, \qquad (2)$$

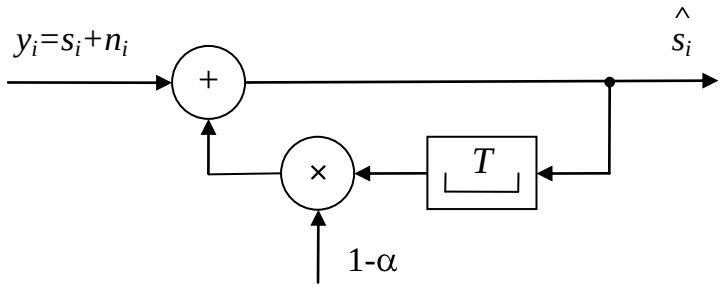
где Φ – период полного колебания (прецессии ротора).

На вход селектора выборки y_i поступают с частотой дискретизации $F_{\text{дискр.}}$, на выходе селектора число оценок регулярной составляющей $\hat{s}_j$ на один оборот ротора постоянно и равно K_0. Оценки следуют с частотой $K_0 F = K_0 \frac{1}{T}$. На схеме рис. 2 частота F равна частоте вращения ротора $F = F_{\text{рот.}}$.

Селекция периодической регулярной составляющей может быть выполнена, как в частотной, так и во временной области. Выбор метода селекции определяется ограничением затрат времени на обработку виброизмерительного сигнала. Периодичность регистрации параметра вибрации в информационно-измерительной системе (ИИС) роторной машины, не должна превышать 100 ms [3]. В соответствии с этими требованиями время на обработку в типовом устройстве защиты составляет до 70…80 ms. Таким образом, время, выделенное на операцию селекции не должно превышать 20…30 ms. С этой точки зрения, более адекватной является обработка во временной области.

Для селекции периодической регулярной составляющей виброизмерительного сигнала в предложенном устройстве (рис. 2) применена схема цифрового чересперiодного накопителя I порядка, показанная на рис. 3.

В общем случае, при обработке одного или нескольких взаимосвязанных процессов $s(t)$, обладающих свойством периодичности (2), возни-



кает необходимость совмещения выборок, как, например, в схеме рис. 3.

Рис. 3. Схема цифрового чересперiодного накопителя I порядка

Условием совмещения дискретных выборок периодического процесса является кратность частот повторения и дискретизации

$$F_{\text{дискр.}} = KF = \frac{K}{T}, \qquad (3)$$

где F – фундаментальная частота прецессии ротора; K – целое число.

В реальных условиях цифровой обработки измерительных сигналов обеспечить выполнение условия (3) технологически не только затруднительно, но и нецелесообразно по следующим причинам:

1) частота вращения ротора есть величина, непрерывно изменяющаяся во времени $F(t)$, тогда реальные процессы обладают свойством периодичности на ограниченных интервалах времени;
2) АЦП имеют постоянную частоту дискретизации $F'_{\text{дискр.}} = F_{\text{дискр.}} \pm 10^{-6}$;
3) библиотечные процедуры обработки периодических сигналов предназначены для равномерного шага дискретизации.

Таким образом, несинхронность является неотъемлемым свойством дискретных выборок процесса, обладающего свойством периодичности.

Для количественной оценки несинхронности при фиксированной частоте дискретизации введём показатель K_F - кратность соотношения частоты дискретизации и частоты вращения ротора

$$K_F = \frac{F_{\text{дискр.}}}{F}. \qquad (4)$$

Реальному виброизмерительному сигналу $y(t)$ соответствует случайный процесс $K_F(t)$.

Теоретическое исследование погрешности совмещения выборок при несинхронных отсчетах

Механизм возникновения погрешности фильтрации регулярной составляющей виброизмерительного сигнала поясняет рис. 4. Непрерывная линия соответствует измеряемому процессу $s(t)$, пунктирная – результату измерения этого процесса $s(t-\Delta t_i)$. Величина погрешности оценки СКЗ регулярной составляющей виброизмерительного сигнала зависит от статистики случайного процесса $K_F(t) = F_{\text{дискр.}} / F(t)$.

Смещение момента синхронизации $t_{\text{ц}_i}$ смещает результат измерения по оси времени t в пределах одного цикла измерения на величину Δt_i

$$\Delta t_i = T_{\text{ц}_i} - T << T, \tag{5}$$

где $T_{\text{ц}_i}$ – период синхронизатора при i-ом цикле синхронизации, величина случайная; T – период повторения измеряемого процесса, величина постоянная для всех циклов синхронизации.

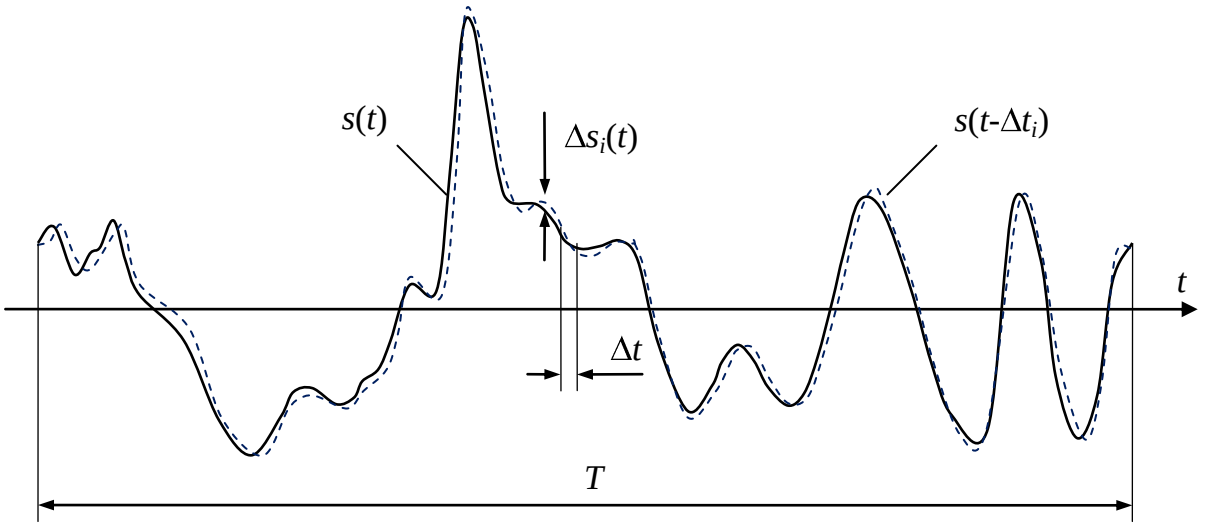


Рис. 4. Погрешность фильтрации регулярной составляющей виброизмерительного сигнала

Погрешность измерения процесса $s(t)$, вносимой синхронизатором назовем процесс

$$\Delta s_i(t) = s(t-\Delta t_i) - s(t), \text{ при } t \in T_{\text{ц}_i}$$

В пределах одного цикла измерения статистика $\Delta s_i(t)$ определяется только статистикой оценки измеряемого процесса $w[s(\Delta t_i)]$, что позволяет считать зависимость $\Delta s_i(t)$ от Δt_i в пределах одного цикла измерения детерминированной. Найдем эту зависимость.

Мгновенные значения погрешности измерения, как видно на рис. 4, равны

$$\Delta s_i(t) = \frac{d}{dt} s(t) \cdot \Delta t_i . \qquad (6)$$

Систематическая погрешность определяется соотношением

$$\Delta s_i^{\text{сист.}}(t) = \frac{1}{T_{\text{ц}_i}} \int\limits_{T_{\text{ц}i}} \Delta s(t) dt = \frac{1}{T_{\text{ц}_i}} \left[\int\limits_{T} \Delta s(t) dt + \int\limits_{\Delta t_i} \Delta s(t) dt \right]. \qquad (7)$$

Поскольку процесс $s(t)$ – периодический, то первое слагаемое тождественно равно нулю. С учетом соотношений (5), (6) и приближения систематическая погрешность равна

$$\Delta s_i^{\text{сист.}}(t) = \frac{\Delta t_i}{T_{\text{ц}_i}} \int\limits_{\Delta t_i} \frac{d}{dt} s(t) dt \cong \frac{\Delta t_i}{T} \cdot \frac{d}{dt} s(t_{\text{ц}_i}) \Delta t_i . \qquad (8)$$

Формула (8) показывает, что систематическая погрешность определяется значением скорости изменения процесса $s(t)$ в момент синхронизации, что так же видно из рис. 4.

Примем, что значение скорости изменения процесса $s(t)$ определяется эффективной шириной его спектра $\Delta F_{\text{эфф.}}$. Тогда порядок систематической погрешности определим соотношением

$$|\Delta s_i^{\text{сист.}}(t)| < \frac{\Delta t_{\max}^2}{T} \cdot 2\pi \cdot \Delta F_{\text{эфф.}} \cdot s_{\max} .$$

Так, например, для штатного тахометра, установленного на турбоэлектрическом агрегате

$$\Delta t_{\max} = T \cdot \frac{1}{3000}, \ \Delta F_{\text{эфф.}} \le 20 \cdot F, \ F = 50 \text{ Hz},$$

$$|\Delta s_i^{\text{сист.}}(t)| < \left(\frac{T}{3000} \right)^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{20F}{T} \cdot s_{\max} = \frac{40\pi}{3000^2} = 1{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot s_{\max} .$$

Второй начальный момент погрешности i-го цикла измерения определяется соотношением

$$\mu_{2_i} = \frac{1}{T_{\text{ц}_i}} \int\limits_{T_{\text{ц}i}} \Delta s_i^2(t) dt = \frac{\Delta t_i^2}{T_{\text{ц}_i}} \int\limits_{T_{\text{ц}i}} \left[\frac{d}{dt} s(t) \right]^2 dt . \qquad (9)$$

Поступая, так же, как и для оценки систематической погрешности, получим

$$\mu_2 < (\Delta t_{\max} \cdot 2\pi \cdot \Delta F_{\text{эфф.}})^2 \frac{1}{T} \int_T s^2(t) dt .$$

Тогда относительная величина второго начального момента погрешности составит

$$\mu_{2_i}^{\text{отн.}} = \frac{\mu_{2_i}}{\sigma_S^2} < (\Delta t_{\max} \cdot 2\pi \cdot \Delta F_{\text{эфф.}})^2 .$$

Для тех же численных значений параметров получаем

$$\mu_{2_i}^{\text{отн.}} < \left(\frac{T}{3000} \cdot 2\pi \cdot 20F \right)^2 = 0{,}04 .$$

Сравнив численные значения оценок (1) и (2) можно считать, что погрешность синхронизации оценку измеряемого процесса не смещает, тогда оценка второго начального момента практически совпадает с оценкой дисперсии. С учетом принятых допущений, СКЗ погрешности оценки измеряемого процесса, вносимой погрешностью синхронизации, составляет $\sigma_{\text{синхр.}} < 0{,}2$.

Оценку погрешности, вносимой синхронизатором на каждом цикле измерения, можно выполнить численно. Для этого заменим в формуле (6) производную первой конечной разностью на сетке (t_{i-1}, t_i, t_{i+1}) с равномерным шагом дискретизации $h = 1/F_{\text{дискр.}}$

$$\frac{d}{dt} s(t_{i,j}) \cong \Delta_{i,j} = \frac{s_{i,j+1} - s_{i,j-1}}{2h}, \qquad (10)$$

где $s_{i,j}$ – отсчеты процесса $S(t)$, отнесенные к i-му циклу измерения, $j = 1$, $N = T \cdot F_{\text{дискр.}}$.

Дисперсию погрешности найдем, представив формулу (9) для вычисления в дискретной форме

$$\sigma_i^2 = \frac{\Delta t_i^2}{T} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{s_{i,j+1} - s_{i,j-1}}{2h} \right)^2 h = \Delta t_i^2 (2h)^{-2} \frac{1}{N} (s_{i,j+1} - s_{i,j-1})^2 , \qquad (11)$$

Формула (11) позволяет вести мониторинг ошибки синхронизации.

Экспериментальное исследование метрологических характеристик устройства виброконтроля

Для экспериментального исследования метрологических свойств устройства виброконтроля использованы два показателя.

Относительная погрешность селекции регулярной составляющей

$$\delta s(K_F) = \frac{\Delta s(K_F)}{\sigma_s(K_F)}, \qquad (12)$$

где $\Delta s = \sqrt{< \Delta s_j >}$, область усреднения определяется двумя факторами: верхняя граница – длительностью состояния квазипериодичности; нижняя граница – требованием быстродействия;

$$\Delta s_j = \sqrt{\frac{1}{K_0} \sum_{k=0}^{K_0-1} (\epsilon_{j-k} - s_{j-k})^2}.$$

Относительная погрешность показателя прецессии вала

$$\delta\sigma_s(K_F) = \frac{\Delta\sigma_s(K_F)}{\sigma_s(K_F)}, \qquad (13)$$

где $\Delta\sigma = \sqrt{< \Delta\sigma_{s_j} >}$, область усреднения определяется двумя факторами аналогично с формулой (12);

$$\Delta\sigma_{s_j} = \sigma_{\epsilon_j} - \sigma_{s_j}.$$

Исследование погрешностей несинхронности выполнено тремя способами:

– путем обработки фрагментов записей виброизмерительных сигналов на действующей роторной машине;

– путём расчета, по методике теоретического исследования погрешности совмещения выборок при несинхронных отсчетах, зависимости верхнего уровня погрешности несинхронности от частоты дискретизации;

– численно на «ИИС аттестации электронных элементов и образцов контрольно-измерительной техники».

При исследовании погрешностей частота вращения ротора находилась в диапазоне $F = 50 \pm 0{,}5$ Hz.

Фрагмент результатов обработки записей виброизмерительных сигналов опорных подшипников роторной машины показан в табл. 1.

Таблица 1.

Результаты обработки записей виброизмерительных сигналов

Номер выборки	Частота вращения ротора F, Hz	Кратность отношения частот дискретизации и вращения ротора, K_F	Отношение регулярной и случайной составляющих виброизмерительного сигнала, $q = \sigma_s / \sigma_n$	Эффективная полоса спектра, $\Delta F_{\text{эфф.}}$, Hz	Относительная погрешность селекции регулярной составляющей, $\delta s(K_F)$	Относительная погрешность показателя прецессии вала, $\delta\sigma_s(K_F)$
1	49,4969	82,7527	0,7115	525	0,1384	-0,0314
2	49,4967	82,7530	0,7384	520	0,1025	-0,0117
3	49,5718	82,6276	0,7183	540	0,1853	-0,0218
4	49,5774	82,6183	0,6903	547	0,1813	-0,0212
5	49,6842	82,4407	0,7138	509	0,1275	-0,0185
6	49,6782	82,4507	0,7467	508	0,1862	0,0042
7	49,8276	82,2034	0,6885	488	0,1281	-0,0107
8	49,8450	82,1747	0,7375	508	0,1662	-0,0094
9	49,9924	81,9325	0,7554	497	0,1050	-0,0083
10	50,0023	81,9162	0,7193	461	0,1155	-0,0103
11	50,0810	81,7875	0,7238	473	0,1080	-0,0212
12	50,0812	81,7872	0,6954	454	0,2444	0,0093

Частота дискретизации типового устройства виброконтроля (рис. 1) составляла $F_{\text{дискр.}} = 4096$ Hz. Для этой частоты кратность соотношения частот дискретизации и вращения ротора лежит в пределе $K_F = 81{,}11...82{,}75$.

Результаты расчета по методике теоретического исследования погрешности совмещения выборок при несинхронных отсчетах показывают, что погрешность минимизируется, если удовлетворяется соотношение

$$K_0 - 0{,}95 < K_F < K_0 + 0{,}95. \qquad (14)$$

Зависимость относительной погрешности селекции регулярной составляющей от кратности отношений частот дискретизации и частоты повторения регулярной составляющей виброизмерительного сигнала для параметров типового устройства виброконтроля представлена на рис. 5. Из ри-

сунка видно, что выбор параметров может быть улучшен путем симметрирования рабочего предела K_F по сравнению с несимметричным пределом ($K_F = 81{,}11...82{,}75$). Найдём частоту дискретизации, обеспечивающую

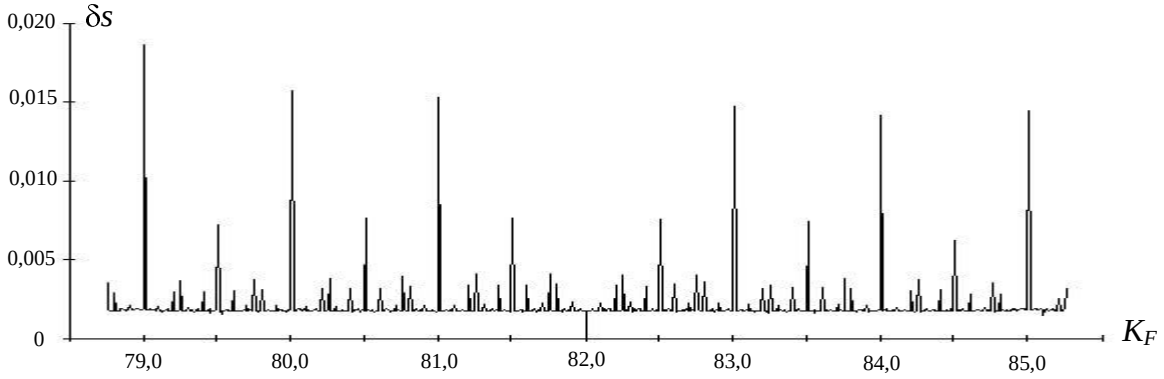


Рис. 5. Зависимость относительной погрешности селекции регулярной составляющей от кратности соотношения частот дискретизации и вращения ротора

выполнение условия (14). Для этого, используя условие (14), получаем два уравнения

$$\frac{F_{\text{дискр.}}}{F_{\text{ном.}} + \Delta F} = K_0 - 0{,}95, \quad \frac{F_{\text{дискр.}}}{F_{\text{ном.}} - \Delta F} = K_0 + 0{,}95.$$

Совместное решение уравнений относительно $F_{\text{дискр.}}$ имеет вид

$$F_{\text{дискр.}} = 0{,}95\frac{(F_{\text{ном.}} + \Delta F)(F_{\text{ном.}} - \Delta F)}{\Delta F}. \qquad (15)$$

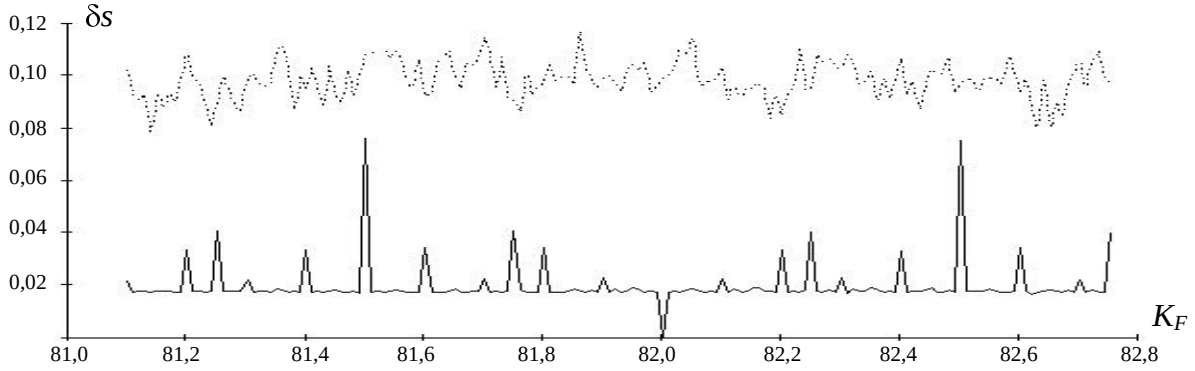
Тогда для предложенного устройства виброконтроля (рис. 2) получаем значение частоты дискретизации, минимизирующее погрешность измерения, $F_{\text{дискр.}} = 4600$ Hz.

Результаты численного исследования погрешностей несинхронности представлены на рис. 6 – рис. 8 и табл. 2. На рис. 6, *б* (непрерывная линия) показан эффект снижения относительной погрешности селекции регулярной составляющей в предложенном устройстве по сравнению с типовым (рис. 6, *а*) за счет применения частоты дискретизации, удовлетворяющей условию (14). На этих же рисунках показана погрешность, вносимая случайной составляющей $n(t)$ независимо от ошибки регулярной составляющей (пунктирная линия).

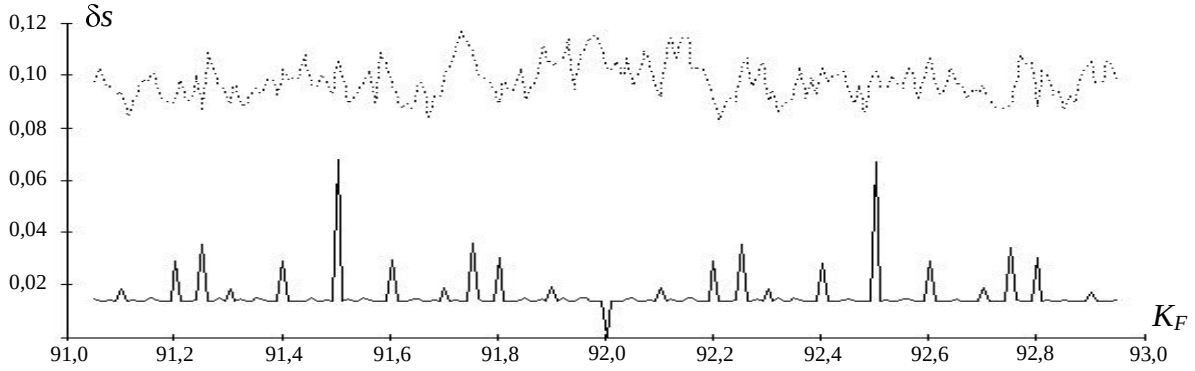
Погрешность предложенного устройства виброконтроля (рис. 2) при обработке виброизмерительного сигнала вида (1) показана на рис. 7. Причем, на рис. 7, *а* показана зависимость относительной погрешности селекции регулярной составляющей от кратности соотношения частоты дискретизации и частоты вращения ротора при частоте дискретизации предло-

женного устройства равной частоте дискретизации типового устройства виброконтроля. На рис. 7,*б* показана эта же зависимость, но при значении частоты дискретизации, минимизирующем погрешность измерения.

Результаты на рис. 6 и рис. 7 получены для одной и той же реализации случайной составляющей. Уровень случайной составляющей соответствует данным табл. 1.



а)



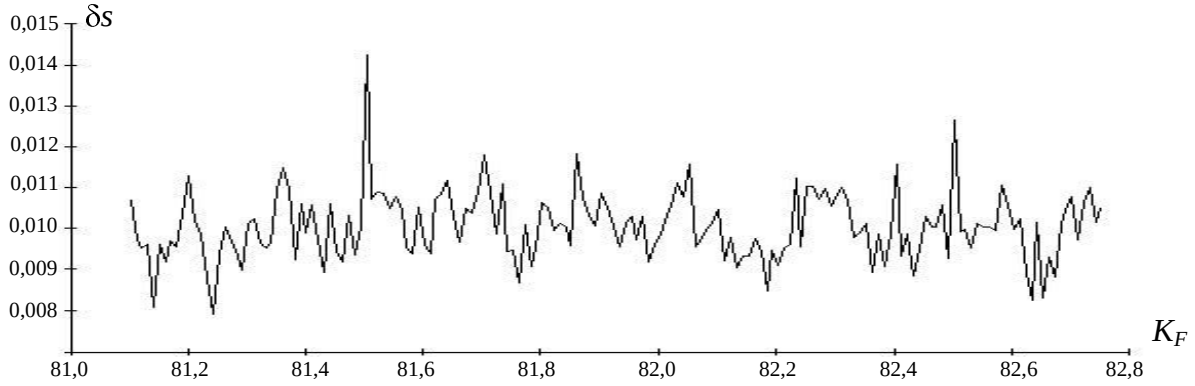
б)

Рис. 6. Зависимость относительной погрешности селекции регулярной составляющей от кратности соотношения частоты дискретизации и частоты вращения ротора $\sigma_{€} = \sigma_{€}(K)$ при раздельном воздействии регулярной (непрерывная линия) и случайной (пунктирная линия) составляющих виброизмерительного сигнала: *а*) – при параметрах типового устройства; *б*) – в предложенном устройстве

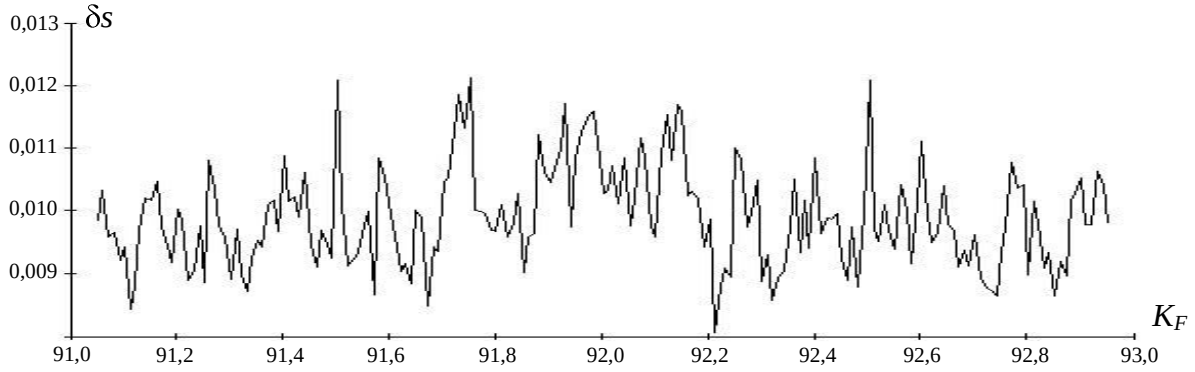
На рис. 8 показана зависимость относительной погрешности показателя прецессии вала от частоты повторения регулярной составляющей $\delta\sigma_s = \delta\sigma_s(F)$. На этом же рисунке показана плотность распределения частоты вращения ротора $w(F)$. Совместная обработка этих зависимостей позволяет количественно оценить и сравнить качество предложенного устройства при типовых и оптимизированных параметрах

$$\delta\sigma_s^{\text{обобщ.}} = \int\limits_{\{F\}} \delta\sigma_s(F) \cdot w(F) \cdot dF \,. \qquad (16)$$

Результаты вычисления обобщенного показателя (16) представлены в табл. 2.



а)



б)

Рис. 7. Зависимость относительной погрешности селекции регулярной составляющей от кратности соотношения частоты дискретизации и частоты вращения ротора $\sigma_{\text{€}} = \sigma_{\text{€}}(K)$ при совместном воздействии регулярной и случайной составляющих виброизмерительного сигнала: *а*) – при параметрах типового устройства; *б*) – в предложенном устройстве

Таблица 2.

Зависимость значения обобщенного показателя от входного сигнала

Частота дискретизации, Hz	4096	4600
$\delta\sigma_s^{\text{обобщ.}}(Y = S, \text{N} = 0)$	0,0199	0,0148
$\delta\sigma_s^{\text{обобщ.}}(Y = N, \text{S} = 0)$	0,0998	0,0994

Частота дискретизации, Hz	4096	4600
$\delta\sigma_s^{\text{обобщ.}}(Y = S + \text{N})$	0,1016	0,1006

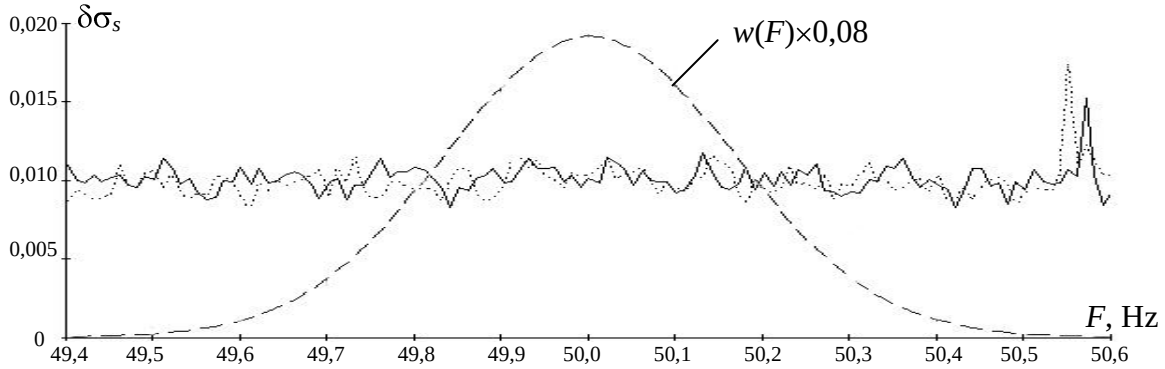


Рис. 8. Зависимость относительной погрешности показателя прецессии вала от частоты повторения регулярной составляющей типового (непрерывная линия) и предложенного (пунктирная линия) устройств виброконтроля и плотность распределения частоты вращения ротора

Анализ экспериментальных результатов позволяет обосновать методику выбора значений рабочих параметров селектора регулярной составляющей виброизмерительного сигнала: частоты дискретизации; времени релаксации.

Результаты оценки статистики СКЗ виброскорости $w(\sigma_y)$ и статистики СКЗ прецессии вала $w(\sigma_s)$ позволяют оценить повышение информативности предложенного устройства виброконтроля по сравнению с типовым. Для действующей роторной машины при равных условиях принятия решения в основном и вспомогательном каналах предложенного устройства виброконтроля информативность возрастает примерно в два раза по сравнению с типовым устройством виброконтроля. Отмеченное свойство позволяет улучшить защиту роторной машины за счёт повышения информативности устройства виброконтроля.

Выводы

Разработан метод измерения интенсивности регулярной составляющей виброизмерительного сигнала и предложено устройство виброконтроля, которое обеспечивает защиту опорных подшипников роторной машины по двум показателям (СКЗ виброскорости σ_y и СКЗ прецессии вала σ_s), в отличие от типового устройства виброконтроля и защиты ВВК-331М. Тео-

ретически и экспериментально обоснована эффективность предложенного устройства виброконтроля.

Установлены параметры предложенного устройства виброконтроля для электромеханических агрегатов, работающих на частоте 50±0,5 Hz, что обеспечивает требование [1] на время реакции защиты на отказ роторной машины. Показана принципиальная возможность применения обработки несинхронных выборок во временной области, что, по сравнению с обработкой в частотной области, уменьшает время реакции защиты на отказ роторной машины.

Выполнена оценка метрологических характеристик предложенного устройства виброконтроля и найдена максимальная погрешность оценки показателя интенсивности воздействия на опорные подшипники прецессии вала ротора.

Результаты теоретического и экспериментального исследований совмещения выборок периодического процесса при несинхронных отсчетах позволяют принимать обоснованные решения при разработках устройств защиты в условиях периодических воздействиях в других диапазонах частот.

Дальнейшие исследования предложенного метода измерения интенсивности регулярной составляющей виброизмерительного планируется провести с целью определения эффективности устройства виброконтроля с применением селекции периодической регулярной составляющей в частотной области.

Список использованной литературы

1. ГОСТ 25364-97 Агрегаты паротурбинные стационарные. Нормы вибрации опор валопроводов и общие требования к проведению измерений. – К.: ИПК Издательство стандартов, 1998.
2. *Генкин М.Д., Соколова А.Г.* Виброакустическая диагностика машин и механизмов. –М.: Машиностроение, 1987. – 288 с.: ил.
3. BS ISO 10816-2-2001 Вибрация. Контроль состояния машин по результатам измерений вибрации на невращающихся частях. Часть 2. Наземные паровые турбины и генераторы мощностью свыше 50 МВт со скоростями вращения 1500, 1800, 3000 и 3600 об/мин. – М.: Издательство стандартов, 2002.
4. *Бендат Дж., Пирсол А*. Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. –М.: Мир, 1989. – 540 с.: ил.

УДК 389.317

В. В. Літвіх, С. А. Богомазов, Ю. С. Шумков, А. О. Назаренко

АНАЛІЗ АЛГОРИТМІВ ВИМІРЮВАННЯ ПОХИБКИ РІЗНОПОЛЯРНОСТІ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ НАПРУГИ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНИХ

Вступ

Перетворювачі напруги термоелектричні (ПНТЕ) мають широке використання як у складі еталонів одиниці електричної напруги змінного струму, так і для передавання її розміру від еталону до інших засобів вимірювальної техніки відповідно до повірочної схеми. Національні еталони одиниці електричної напруги змінного струму в діапазоні частот до 1 МГц більшості розвинутих країн використовують ПНТЕ на основі багатоелементних термоперетворювачів [1–3]. В діапазоні частот до 30 МГц і вище застосовуються ПНТЕ на основі одноелементних вакуумних безконтактних термоперетворювачів типу ТВБ–3, ТВБ–4 [4]. Серед технічних характеристик для таких ПНТЕ як зразкових перетворювачів 1–го та 2–го розрядів установлюється різниця термоелектрорушійної сили (термоЕРС) при зміні полярності вхідної напруги постійного струму. Причиною виникнення такої різниці термоЕРС (подалі – похибки різнополярності) є термоелектричні ефекти Пельтьє та Томсона, а також неідеальність конструкції термоперетворювача (термопара зміщена відносно середини нагрівача) [5].

Експериментальне визначення похибки різнополярності ПНТЕ за допомогою певних засобів вимірювальної техніки супроводжується виникненням невилученої систематичної похибки, значення якої залежить як від типу цих засобів вимірювальної техніки, так і від алгоритму, відповідно до якого похибка різнополярності вимірюється.

Постановка задачі

Як математичну модель характеристики перетворення ПНТЕ (тобто залежність термоЕРС e на виході ПНТЕ від вхідної напруги u на вході ПНТЕ) досить часто використовують функцію вигляду $e = \phi\ u\ = Ku^2$, де K – коефіцієнт перетворення, значення якого залежить від матеріалу нагрівача, конструкції термоперетворювача та умов його роботи [5]. Внаслідок перерахованих причин характеристика перетворення ПНТЕ за-

лежить від полярності напруги постійного струму – позитивної або негативної (умовно).

Абсолютна похибка різнополярності $\Delta_{РП}$ визначається формулою:

$$\Delta_{РП} = \left. E_0^+ - E_0^- \right|_{U_0^+ = |U_0^-|},$$

де E_0^+, E_0^- – значення термоЕРС e на виході ПНТЕ при прикладанні до його входу напруги постійного струму позитивної полярності зі значенням U_0^+ та негативної полярності з абсолютним номінальним значенням $|U_0^-|$, причому $U_0^+ = |U_0^-|$.

Відносна похибка різнополярності визначається формулою:

$$\delta_{РП} = \frac{\Delta_{РП}}{\bar{E}_0} = \frac{E_0^+ - E_0^-}{E_0^+ + E_0^- \,/2} = 2\left.\frac{E_0^+ - E_0^-}{E_0^+ + E_0^-}\right|_{U_0^+ = |U_0^-|}. \qquad (1)$$

Якщо чисельник та знаменник в (1) поділити на $U_0^{+\,2}$, то наведене вище рівняння зводиться до вигляду:

$$\delta_{РП} = 2\left.\frac{K^+ - K^-}{K^+ + K^-}\right|_{U_0^+ = |U_0^-|}. \qquad (2)$$

де $K^+ = E_0^+ / U_0^{+\,2}$, $K^- = E_0^- / U_0^{-\,2}$ – коефіцієнти перетворення ПНТЕ на постійному струмі при позитивній та негативній полярності вхідної напруги постійного струму відповідно.

Виконання умови $|U_0^-| = U_0^+$ означає, що зміна полярності напруги постійного струму на вході ПТНЕ здійснюється шляхом ідеального її реверсування. Для цього інколи використовують спеціальні перемикачі з малим перехідним опором контактів. Але на практиці ідеальне реверсування напруги постійного струму не можна здійснити. Як правило, напругу постійного струму на вході ПНТЕ створюють за допомогою калібратора. Як наслідок відносна похибка різнополярності $\delta'_{РП}$ замість (1) визначається формулою:

$$\delta'_{РП} = 2\left.\frac{E_1^+ - E_1^-}{E_1^+ + E_1^-}\right|_{U_1^+ \neq |U_1^-|}. \qquad (3)$$

Для визначення відносної похибки різнополярності при виконанні умови $U_1^+ \neq \left|U_1^-\right|$ можна формально використовувати (2), оскільки $E_0^+ \Big/ U_0^{+\ 2} \cong E_1^+ \Big/ U_1^{+\ 2}$, $E_0^- \Big/ U_0^{-\ 2} \cong E_1^- \Big/ U_1^{-\ 2}$:

$$\delta'_{РП} = 2\frac{K^+ - K^-}{K^+ + K^-}\Bigg|_{U_1^+ \neq \left|U_1^-\right|}. \qquad (4)$$

Формули (3), (4) відповідно до яких розраховується відносна похибка різнополярності $\delta'_{РП}$ ПНТЕ, можна розглядати як алгоритми її посереднього вимірювання, тобто результат вимірювання $\hat{\delta}'_{РП}$ є функцією ϕ результатів вимірювання напруги постійного струму u^+, u^- на вході ПНТЕ та (або) термоЕРС e^+, e^- на виході ПНТЕ:

$$\hat{\delta}'_{РП} = \phi_1\ \hat{E}_1^+, \hat{E}_1^-\ = 2\ \hat{E}_1^+ - \hat{E}_1^-\ \Big/\ \hat{E}_1^+ + \hat{E}_1^-\ . \qquad (5)$$

$$\hat{\delta}'_{РП} = \phi_1\ \hat{U}_1^+, \hat{U}_1^-, \hat{E}_1^+, \hat{E}_1^-\ = 2\left[\frac{\hat{E}_1^+}{\hat{U}_1^{+\ 2}} - \frac{\hat{E}_1^-}{\hat{U}_1^{-\ 2}}\right] \Bigg/ \left[\frac{\hat{E}_1^+}{\hat{U}_1^{+\ 2}} + \frac{\hat{E}_1^-}{\hat{U}_1^{-\ 2}}\right]. \qquad (6)$$

Відповідно до вимог ГОСТ 8.207–94 до невилученої систематичної похибки результату можуть входити невилучені систематичні похибки методу, засобів вимірювання та викликані іншими джерелами.

Невилучена систематична похибка методу (методична похибка) Θ_M – це складова похибки вимірювання, що зумовлена неадекватністю об'єкта вимірювання та його моделі, прийнятою при вимірюванні. Стосовно випадку, який розглядається, об'єктом вимірювання є похибка різнополярності, яка розраховується за формулами (5) або (6), а математичними моделями є формули (1), (2). Причиною виникнення систематичної методичної похибка $\Theta_M = \delta_{РП.R} - \delta_{РП.I}$, тобто різниці між значенням похибки, розрахованим за формулою (3) або (4) і ідеальним значенням, розрахованим за формулою (1), є те, що виконується умова $U_1^+ \neq \left|U_1^-\right|$, тобто існує різниця напруги постійного струму $\Delta U_1 = U_1^+ - \left|U_1^-\right|$.

Невилучена систематична похибка засобів вимірювання зумовлена систематичною похибкою Θ_u вимірювання напруги постійного струму u_1^+, u_1^- на вході ПНТЕ та систематичною похибкою Θ_e вимірювання термоЕРС e_1^+, e_1^- на виході ПНТЕ.

Як границі кожної з перерахованих вище абсолютних систематичних похибок приймають допустиме значення систематичної похибки відповідного засобу вимірювання певної величини:

– напруги постійного струму на вході ПНТЕ;

– термоЕРС на виході ПНТЕ.

При цьому їх розглядають як некорельовані складові, оскільки зазвичай вони зумовлені або різними засобами вимірювання, похибками на різних діапазонах вимірювання одного і того ж засобу вимірювання.

Границю невилученої систематичної абсолютної похибки Θ_δ результату вимірювання відносної похибки різнополярності $\delta_{РП}$ ПНТЕ оцінюють за формулою:

$$\Theta_\delta = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Theta_i^2} = k\sqrt{\Theta_M^2 + \Theta_u^2 + \Theta_e^2}\,, \qquad (7)$$

де k – коефіцієнт, який залежить від m кількості складових в (7);

Припустимо, що як ПНТЕ розглядається зразковий перетворювач з параметрами, які відповідають вимогам ГОСТ 8.458–82, табл. 4, а саме, номінальне значення вхідної напруги U_N=1 В; номінальне значення термоЕРС E_N =6×10–3 В (тобто номінальне значення коефіцієнту перетворення K_N =6×10–2 В–1); різниця термоЕРС при зміні полярності напруги постійного струму не більше 0,01% від E_N. Оскільки різниця термоЕРС при зміні полярності напруги постійного струму зумовлена різними значеннями коефіцієнтів перетворення при позитивній та негативній полярності напруги постійного струму K^+, K^-, то для подальших досліджень прийнято, що $K^- = K_N$, а K^+ приймає значення від 6,0001×10–2 до 6,0005×10–2 В–1. Відповідно до (2) для такого ПНТЕ ідеальне значення відносної похибки різнополярності $\delta_{РП.I} = 16{,}7\times10–6$. Те ж саме значення відносної похибки різнополярності $\delta_{РП.I}$ дає формула (1), якщо врахувати прийняті раніше позначення, а саме: $U_0^+ = \left|U_0^-\right| = U_N$.

Досить очевидно, що розрахунок відносної похибки різнополярності $\delta'_{РП.R}$ за формулою (4) не супроводжується виникненням методичної похибки, тобто Θ_M =0.

Як показали дослідження, при використанні формули (3) методична похибка Θ_M виявилася дуже суттєвою. Якщо припустити, що напруга постійного струму на вході ПНТЕ з номінальним значенням U_N=1 В створюється за допомогою калібратора Н4–7 на діапазоні відтворювання з кінцевим значенням 2 В, то різниця ΔU_1 змінюється в діапазоні ±10×10–6

В, а методична похибки $\Theta_M = \delta'_{РП.R} - \delta_{РП.I}$ лінійно залежить від різниці ΔU_1 і становить ±20 ppm (1 ppm=10–6).

Невилучена систематична похибка Θ_e вимірювання термоЕРС e_1^+, e_1^- визначається як композиція корельованих невилучених систематичних похибок $\chi_{e_1^+}\Delta_{e_1^+}, \chi_{e_1^-}\Delta_{e_1^-}$ за формулою:

$$\Theta_e = \chi_{e_1^+}\Delta_{e_1^+} + \chi_{e_1^-}\Delta_{e_1^-}, \qquad (8)$$

де $\chi_{e_1^+}, \chi_{e_1^-}$ – коефіцієнти впливу допустимих абсолютних систематичних похибок $\Delta_{e_1^+}, \Delta_{e_1^-}$ вимірювання термоЕРС e_1^+, e_1^- на невилучену систематичну похибку Θ_e. Оскільки вимірювання термоЕРС e_1^+, e_1^- виконується на одному і тому ж діапазоні вимірювання, то $\Delta_{e_1^+} \cong \Delta_{e_1^-} = \Delta_e$, а формула (8) зводиться до виду:

$$\Theta_e \cong \Delta_e \ \chi_{e_1^+} + \chi_{e_1^-} \ .$$

Можна показати, що за умови використання для вимірювання термоЕРС e_1^+, e_1^- нановольтметра HP34420A фірми Hewlett Packard абсолютна систематична похибка вимірювання знаходиться в межах Δ_e =±0,33×10-6 В.

Коефіцієнти впливу $\chi_{e_1^+}$, $\chi_{e_1^-}$ розраховуються методом частинних похідних і мають наступні аналітичні вирази:

$$\chi_{e_1^+} = \frac{\partial \phi_1 \ \hat{E}_1^+, \hat{E}_1^-}{\partial \hat{E}_1^+} = \frac{4\hat{E}_1^-}{\hat{E}_1^+ + \hat{E}_1^{-\,2}}, \text{ В–1; } \chi_{e_1^-} = \frac{\partial \phi_1 \ \hat{E}_1^+, \hat{E}_1^-}{\partial \hat{E}_1^-} = \frac{-4\hat{E}_1^+}{\hat{E}_1^+ + \hat{E}_1^{-\,2}}, \text{ В–1.}$$

Як показали дослідження, модуль невилученої систематичної похибки $\left|\Theta_e\right|$ вимірювання термоЕРС e_1^+, e_1^- на виході ПНТЕ, що розглядається, за допомогою нановольтметру HP34420A не перевищує значення 0,006 ppm.

Невилучена систематична похибка Θ_u вимірювання напруг постійного струму u_1^+, u_1^- визначається як композиція корельованих невилучених систематичних похибок $\chi_{u_1^+}\Delta_{u_1^+}, \chi_{u_1^-}\Delta_{u_1^-}$ за формулою:

$$\Theta_u = \chi_{u_1^+}\Delta_{u_1^+} + \chi_{u_1^-}\Delta_{u_1^-}, \qquad (9)$$

де $\chi_{u_1^+}, \chi_{u_1^-}$ – коефіцієнти впливу допустимих абсолютних систематичних похибок $\Delta_{u_1^+}, \Delta_{u_1^-}$ вимірювання напруги постійного струму u_1^+, u_1^- на невилучену систематичну похибка Θ_u.

Припустимо, що напруга постійного струму на вході ПНТЕ вимірюється за допомогою другого каналу нановольтметра HP34420A (перший канал використовується для вимірювання термоЕРС на виході ПНТЕ), абсолютна систематична похибка Δ_u якого (протягом одного року) на діапазоні вимірювання з кінцевим значенням 1 В знаходиться в межах: $\Delta_{u_1^+} \cong \Delta_{u_1^-} = \Delta_u = \pm 39 \times 10\text{–}6$ В.

Як показали дослідження, сума коефіцієнтів впливу в (9) практично не залежить від різниці ΔU_1 та від ідеального значення відносної похибки різнополярності $\delta_{РП.I}$, і має значення $\chi_{u_1^+} + \chi_{u_1^-} \cong$–4 В–1. Таким чином $\Theta_u \cong -156$ ppm.

Враховуючи наведене вище, можна зробити висновок, що в алгоритмі (6) суттєво переважаючою є невилучена похибка, зумовлена систематичною похибкою Θ_u вимірювання напруги постійного струму u_1^+, u_1^- на вході ПНТЕ.

Синтез та аналіз нового алгоритму

Внаслідок проведеного аналізу виникла задача – шляхом певної модифікації відомих алгоритмів (5), (6) синтезувати новий алгоритм, який забезпечує мінімізацію як систематичної методичної похибки, так і похибки засобів вимірювання. Було припущено, що у відомих алгоритмах результати вимірювання $\hat{U}_1^+, \hat{U}_1^-, \hat{E}_1^+, \hat{E}_1^-$ забезпечують недостатньо інформації стосовно характеристики перетворення ПНТЕ. Для збільшення інформації потрібно додатково проводити вимірювання при напрузі постійного струму $U_2^+ = \left|U_2^-\right| = U_N\ 1 \pm 10^{-n}$, де параметр n може приймати значення n=3,4,5, тобто за умови, що абсолютне значення напруги постійного струму U_2 близьке до номінального значення вхідної напруги ПНТЕ, і використовувати подалі результати вимірювання $\hat{U}_1^+, \hat{U}_1^-, \hat{U}_2^+, \hat{U}_2^-$, а також $\hat{E}_1^+, \hat{E}_1^-, \hat{E}_2^+, \hat{E}_2^-$ У подальшій модифікації алгоритму (4) з метою зменшення (або взагалі вилучення) коефіцієнту впливу абсолютної похибки вимірювання напруги постійного струму використано наступне. В

алгоритмі (4) результати вимірювання напруги постійного струму $\hat{U}_1^-, \hat{U}_1^+$ можна представити через результати вимірювання термоЕРС та коефіцієнти перетворення ПНТЕ: $\left|\hat{U}_1^-\right| = \sqrt{\hat{E}_1^- / K^-}$, $\left|\hat{U}_1^+\right| = \sqrt{\hat{E}_1^+ / K^+}$. Значення коефіцієнту перетворення K^+ при напрузі постійного струму позитивної полярності можна розрахувати, використовуючи наступні співвідношення. Для кута α (кут нахилу характеристики перетворення ПНТЕ в точці $u = U_1^+$) можна записати таке: з одного боку $tg\alpha \cong E_2^+ - E_1^+ \Big/ U_2^+ - U_1^+$; з іншого боку можна використати значення похідної від характеристики перетворення ПНТЕ в точці $u = U_1^+$: $tg\alpha \cong \left.\dfrac{d\ K^+u^2}{du}\right|_{u=U_1^+} = 2K^+U_1^+$. Тоді розраховане значення K_{R1}^+ коефіцієнту перетворення ПНТЕ при напрузі постійного струму позитивної полярності визначається формулою $K_{R1}^+ \cong \hat{E}_2^+ - \hat{E}_1^+ \Big/ \left[2\ \hat{U}_2^+ - \hat{U}_1^+\ \hat{U}_1^+\right]$.

Якщо використати значення похідної від характеристики перетворення в точці $u = U_2^+$, тобто $tg\alpha \cong \left.\dfrac{d\ K^+u^2}{du}\right|_{u=U_2^+} = 2K^+U_2^+$, то розраховане значення K_{R2}^+ коефіцієнту перетворення ПНТЕ при напрузі постійного струму позитивної полярності приблизно визначається формулою $K_{R2}^+ \cong \hat{E}_2^+ - \hat{E}_1^+ \Big/ \left[2\ \hat{U}_2^+ - \hat{U}_1^+\ \hat{U}_2^+\right]$. Більш точне значення коефіцієнту перетворення ПНТЕ при напрузі постійного струму позитивної полярності можна отримати як середньо арифметичне значення: $K_R^+ = K_{R1}^+ + K_{R2}^+ \Big/ 2$.

Аналогічним чином можна показати, що розраховане значення K_R^- коефіцієнту перетворення ПНТЕ при напрузі постійного струму негативної полярності $K_R^- = K_{R1}^- + K_{R2}^- \Big/ 2$,

де $K_{R1}^- \cong \dfrac{\hat{E}_2^- - \hat{E}_1^-}{2\left|\hat{U}_2^-\right| - \left|\hat{U}_1^-\right|\left|\hat{U}_1^-\right|}$, $K_{R2}^- \cong \dfrac{\hat{E}_2^- - \hat{E}_1^-}{2\left|\hat{U}_2^-\right| - \left|\hat{U}_1^-\right|\left|\hat{U}_2^-\right|}$.

Здійснюючи послідовно відповідні підстановки в (4), отримаємо:

$$\hat{\delta}_{РП.R} = 2\left[\frac{\hat{E}_1^+ - \hat{E}_1^-}{\hat{E}_1^+ + \hat{E}_1^-} + \sqrt{\frac{\hat{E}_1^- \;\; \hat{E}_2^+ - \hat{E}_1^+}{\hat{E}_1^+ \;\; \hat{E}_2^- - \hat{E}_1^-} \frac{\hat{U}_1^+ + \hat{U}_2^+}{\left|\hat{U}_1^-\right| + \left|\hat{U}_2^-\right|} \frac{\left|\hat{U}_2^-\right| - \left|\hat{U}_1^-\right|}{\hat{U}_2^+ - \hat{U}_1^+} \frac{\left|\hat{U}_2^-\right|\left|\hat{U}_1^-\right|}{\hat{U}_2^+ \hat{U}_1^+}} - 1\right] \quad (10)$$

Алгоритм (10) можна суттєво спрости та звести до вигляду:

$$\hat{\delta}_{РП.R} \cong 2\left[\frac{\hat{E}_1^+ - \hat{E}_1^-}{\hat{E}_1^+ + \hat{E}_1^-} + \frac{\hat{E}_1^- \;\; \hat{E}_2^+ - \hat{E}_1^+}{\hat{E}_1^+ \;\; \hat{E}_2^- - \hat{E}_1^-} - 1\right]. \quad (11)$$

Оскільки в алгоритмі (11) відсутні результати вимірювання напруги постійного струму $\hat{U}_1^+, \hat{U}_1^-, \hat{U}_2^+, \hat{U}_2^-$, то при його використанні принципово відсутня похибка, зумовлена засобами вимірювання напруги постійного струму, яка є досить суттєва при використанні алгоритму (4).

Абсолютна систематична похибка Δ_e вимірювання термоЕРС $e_1^+, e_1^-, e_2^+, e_2^-$ за допомогою нановольтметру HP34420A має теж значення, яке наведено вище, тобто знаходиться в межах ±0,33×10–6 В. Враховуючи аналітичні вирази для коефіцієнтів впливу $\chi_{e_1^+}, \chi_{e_1^-}, \chi_{e_2^+}, \chi_{e_2^-}$ та їх значення, проведено моделювання залежності абсолютної систематичної похибки Δ_e вимірювання термоЕРС від різниці ΔU_1, результати якого наведені на рис.1 за умови, що $U_1^+ = U_N^+ \pm \Delta U_1$, $\left|U_1^-\right| = U_N \pm \Delta U_1$, $U_2^+ = U_N \; 1 \pm 10^{-4} \; \pm \Delta U_1$, $\left|U_2^-\right| = U_N \; 1 \pm 10^{-4} \; \pm \Delta U_1$ (тобто передбачається, що похибка відтворення напруг постійного струму U_1^+, U_1^- за допомогою калібратора така ж, як і напруг U_2^+, U_2^-, оскільки вони близькі за значенням).

На рис. 2 наведено результати моделювання методичної похибки Θ_M, яка виникає при використанні алгоритму (11), в залежності від різниці ΔU_1 за тих же умов, що наведено вище.

З урахуванням наведених результатів моделювання та відповідно до (7) можна стверджувати, що при використанні алгоритму (11) границя невилученої систематичної абсолютної похибки Θ_δ результату вимірювання відносна похибка різнополярності $\hat{\delta}_{РП}$ ПНТЕ з вірогідністю 0,99 не перевищує значення $\Theta_\delta = k\sqrt{\Theta_M^2 + \Theta_e^2} \cong 2{,}6\times10\text{–}3$ ppm, де значення $k \cong 1{,}3$ вибирається відповідно до ГОСТ 8.207–94.

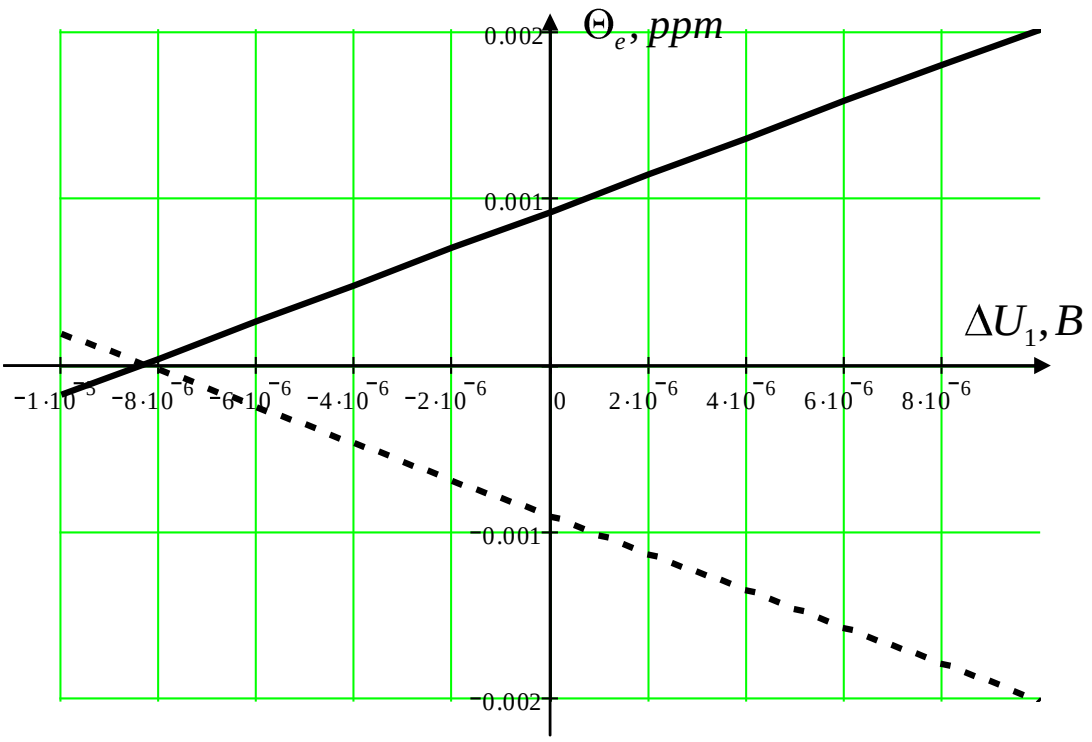


Рис. 1. Залежність систематичної похибки Θ_e вимірювання термо-ЕРС, яка виникає при використанні алгоритму (11), в залежності від різниці ΔU_1

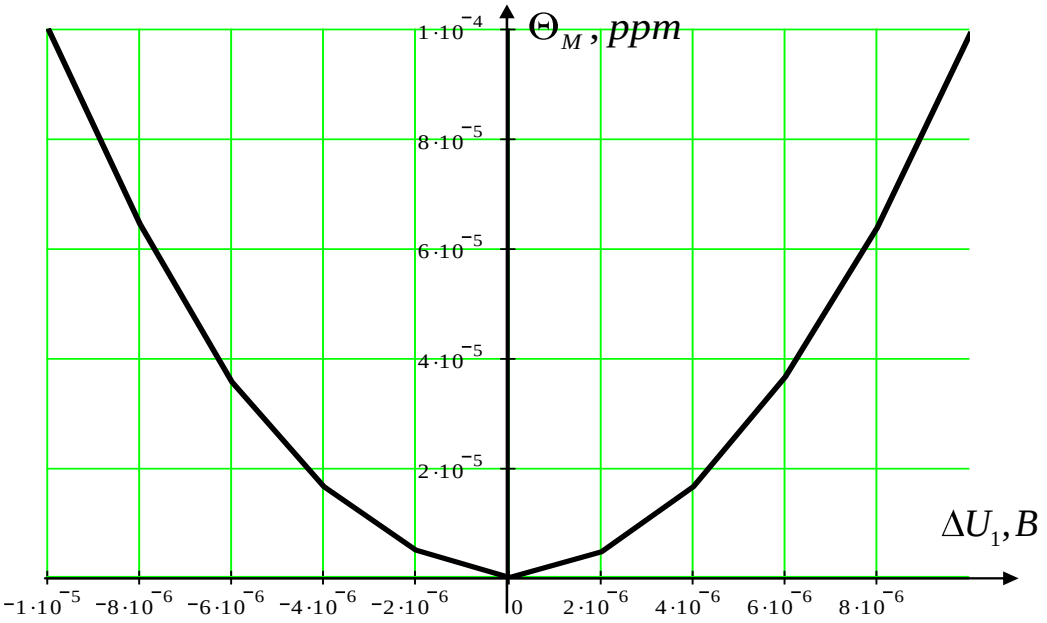


Рис. 2. Залежність методичної похибки Θ_M, яка виникає при використанні алгоритму (11), в залежності від різниці ΔU_1

Висновки

Проведений аналіз відомих алгоритмів вимірювання похибки різнополярності показав їх певну недосконаліть з точки зору досить великого рівня різних складових невилученої систематичної похибки Θ_δ результату вимірювання відносної похибки різнополярності $\hat{\delta}_{РП}$ ПНТЕ – методичної похибки Θ_M та (або) невилученої систематичної похибки Θ_u засобів вимірювання напруги постійного струму на вході ПНТЕ та похибки Θ_e вимірювання термоЕРС на виході ПНТЕ.

На основі проведеного аналізу запропоновано новий алгоритм вимірювання похибки різнополярності, сутність якого полягає в отриманні додаткової інформації стосовно характеристики перетворення ПНТЕ за рахунок використання додатково двох напруг постійного струму, які близькі до номінального значення вхідної напруги ПНТЕ. Результати моделювання запропонованого алгоритму підтвердили, що при його використанні границя невилученої систематичної абсолютної похибки Θ_δ результату вимірювання відносної похибки різнополярності $\hat{\delta}_{РП}$ ПНТЕ знаходиться в межах приблизно ±2×10–3 ppm.

Список використаної літератури

1. *F. L. Hermach, J. R. Kinrad.* Multijunction Thermal Converters as the NBS Primary AC–DC Transfer Standards for AC Current and Voltage Measurements // IEEE Trans. Instrum. Meas., IM–36, June 1987. – P.300–306.
2. *F. J. Wilkins.* Theoretical analysis of the ac–dc difference of the NPL multijunction thermal converter // IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 21, 1985. – P.334–340.
3. *M. Klonz.* AC–DC transfer difference of the PTB–multijunction thermal converter in the frequency range from 10 Hz to 100 kHz // IEEE Trans. Instrum. Meas., IM–36, Nov. 1987. – P.320–329.
4. *Акнаев Р. Ф., Галахова О. П., Рождественская Т. Б.* Методы и средства обеспечения единства измерений напряжения переменного тока // Труды метрол. Ин–тов СССР, 1972, вып. 138, С.47–57.
5. *Анатычук Л. И.* Термоэлементы и термоэлектрические устройства: Справочник. – К.: Наукова думка, 1979. – 768 с.

УДК 303.714

О. М. Сікоза, О. Ю. Редьога, Н. А. Яремчук

АНАЛІЗ ФУНКЦІОНУВАННЯ СИСТЕМИ З ІНДИВІДУАЛЬНОЮ ТРАЄКТОРІЄЮ НАВЧАННЯ

Вступ

За теперішнього часу тенденція до використання інформаційних технологій в навчанні спостерігається в усьому світі. Сучасний етап розвитку характеризується використанням персоніфікованих систем навчання або систем навчання з забезпеченням індивідуальної траєкторії. Індивідуальна освітня траєкторія визначається як певна послідовність елементів учбової діяльності кожного учня з реалізації власних освітніх задач, що відповідають їх здібностям, можливостям, мотивації, інтересам.

Серед систем з індивідуальною траєкторією навчання виділяють персоніфіковану систему Келлера [1], за якою учбові курси розподіляють на одиниці вивчення, які учень вивчає в обраному для нього самого темпі. Тобто учням дозволяється працювати на змінних швидкостях по всьому курсу. Крім того, це забезпечує вивчення курсу учням з різним рівнем навчання за рахунок можливості багаторазового повторення поданого матеріалу.

Шкільна модель Керрола, що дозволяє визначити час, необхідний для вивчення матеріалу, як функцію здібності і мотивації, була вдосконалена Джонстоном і Алдриджем [1], знайшла відображення в аналітичному виразі:

$$L = 100[1 - \exp(-k(t - t_0))],$$

де L – відображає досягнення в навчанні; t – час навчання; t_0 – час, що необхідний для попереднього навчання; $K = CM$, де C і M є функціями здібності і мотивації відповідно.

Треба зазначити, що вивчення і визначення здатності кожного учня – це дуже складна проблема, особливо для групи учнів. Друга важлива проблема – це регулювання швидкості або темпу навчання. Для вирішення цих проблем персоніфікований навчальний матеріал розробляють так, щоб він відповідав профілю учня. Крім того, також важливим є забезпечення адаптації шляху або траєкторії навчання, яке б відповідало відмінностям кожного учня в процесі навчання. У відповідності з цими вимогами рекомендується структуризація учбового матеріалу на компоненти, які, в свою чергу, складаються з учбових матеріалів, практичних завдань, тренінгів і тестів. В такому навчальному середовищі учень обирає свій власний план або траєкторію відповідно до його мети, часу вивчення,

мотивації, тощо. Перед переходом до наступної структурної одиниці учбового матеріалу учень повенен виконати певні вправи або пройти тестування. На основі отриманих результатів формується поточний профіль учня, який може бути використаний для перевірки правильності або корекції (при необхідності) індивідуальної траєкторії навчання.

Постановка задачі

При застосуванні навчання за індивідуальною траєкторією потрібна комп'ютеризація не тільки самого процесу навчання, а й процедури вибору індивідуальної траєкторії на основі прогнозування за даними про початковий або поточний рівень знань учня, а також процедури постійного стеження за переміщенням учня по індивідуальній траєкторії з метою перевірки правильності вибору індивідуальної траєкторії або можливості досягнення поставленої мети і, за необхідністю, корекції індивідуальної траєкторії.

Враховуючи те, що дані про рівень знань учнів подано в вербальній шкалі (шкалі квазіпорядку) як характеристику «вхід–вихід» окремої структурної одиниці курсу обрано матрицю переходу у вигляді нечіткого відношення. В статті поставлена задача аналізу використання нечіткого відношення для групового і індивідуального прогнозування певних результатів навчання, вибору та корекції індивідуальної траєкторії.

1. Структура і функціонування системи дистанційного навчання з індивідуальною траєкторією

Дослідження і аналіз було проведено на прикладі системи дистанційного навчання з дисципліни «Метрологічне забезпечення програмних засобів». Дидактичне забезпечення складалося з п'яти модулів: М1 – «Показники якості програмних засобів»; М2 – «Метрична теорія програм»; М3 – «Номенклатура показників якості програмних засобів метрологічного призначення»; М4 – «Надійність програмних засобів»; М5 – «Випробування і атестація програмних засобів метрологічного призначення». В кожному модулі дидактичний матеріал було подано за трьома рівнями формування знань, умінь та навичок. Перший рівень – це формування знань (аналог – лекції), другий рівень – формування знань, вмінь та навичок (лекції, практичні заняття з прикладами розв'язання завдань, комп'ютерний практикум), третій – закріплення отриманих знань, умінь і навичок (лекції, практичні заняття з прикладами розв'язання завдань, комп'ютерний практикум, розрахункові роботи). Таким чином, за спосо-

бами засвоєння матеріалу $j=1,2,3$ кожний $i-$й модуль було подано як сукупність $U_i^j=\{U_i^1;U_i^2;U_i^3\}$.

Математична модель функціонування системи дистанційного навчання може бути подана наступним кортежем:

$$<M,U,\delta,x_0,x>$$

де $M=\{M_i\}$ – сукупність модулів; $U=\{U^j\}$ – сукупність способів засвоєння матеріалу; $\delta=\{\delta_{i,i+1}\}$ – сукупність матриць переходу від $i-$го до $(i+1)-$го модуля; x_0 – початковий рівень знань, що визначається за вхідним тестуванням, або апріорною інформацією про учнів; $x=\{x_i\}$ – рівень знань на виході $i-$го модуля.

Структуру процесу формування індивідуальної траєкторії наведено на рис. 1.

Оцінка рівня знань відповідає вербальним градаціям шкали квазіпорядку x_i^0 – «незадовільно», x_i^1 – «задовільно», x_i^2 – «добре», x_i^3 – «відмінно». При рівні знань x_i^0 учень повертається до повторного вивчення модуля. Тобто, при переході використовуються тільки градації x_i^1,x_i^2,x_i^3. Верба-

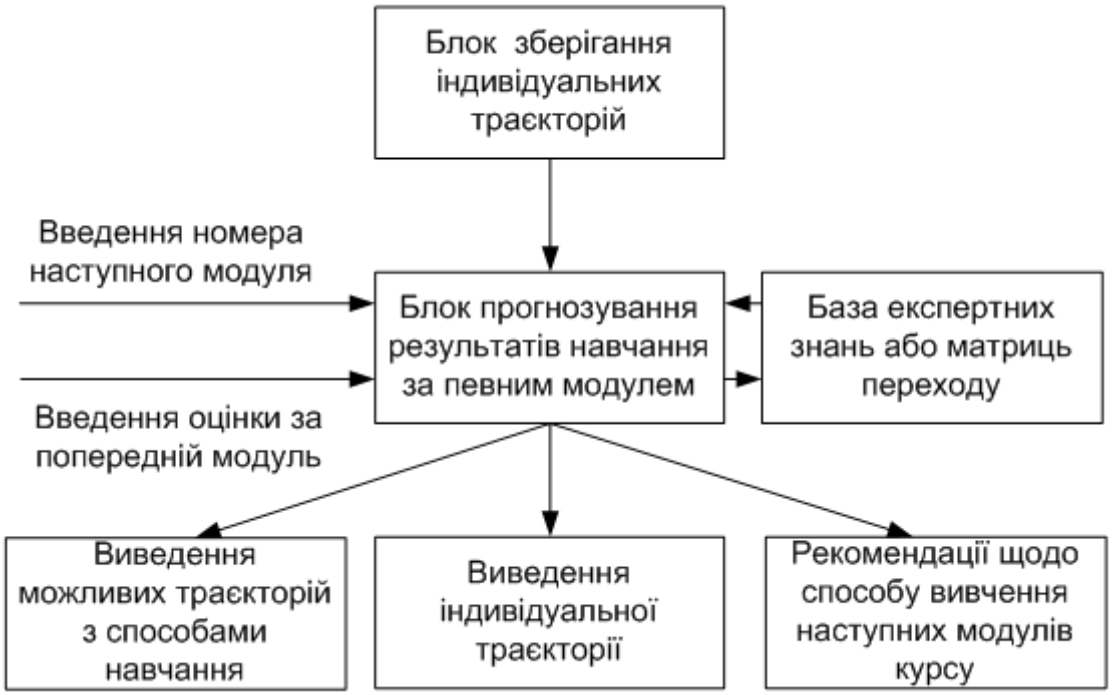


Рис. 1. Структура процесу формування індивідуальних траєкторії

льні градації можуть також бути подані за шкалою ECTS: A, B, C, D, F, FX. Вибір індивідуальної траєкторії пов'язаний з прогнозуванням оцінки на виході модуля при певному способі навчання за рівнем знань на вході модуля. Зважаючи на те, що вхідні дані x_i^1, x_i^2, x_i^3 і результати прогнозування y_i^1, y_i^2, y_i^3 подано за шкалою квазіпорядку, для аналізу роботи системи як характеристику «вхід–вихід» було обране нечітке відношення $\underset{\sim}{R}$:

$$\underset{\sim}{R} = \left\| r_{ij} \right\| =$$

	y^1	y^2	y^3
x^1	r_{11}	r_{12}	r_{13}
x^2	r_{21}	r_{22}	r_{23}
x^3	r_{31}	r_{32}	r_{33}

Матриця нечіткого відношення може бути отримана за експериментальними даними або за апріорними даними, отриманими під час пілотного експерименту.

2. Побудова нечіткого відношення за апріорними даними

При пілотному експерименті фіксуються оцінки, що характеризують рівень знань на вході і на виході певного модуля, тобто визначаються пари (x, y). Далі підраховується кількість пар з однаковою оцінкою на вході: «задовільно» – n_1, «добре» – n_2, « відмінно» – n_3. Також підраховується кількість пар з однаковими оцінками: для пар $x^1 y^2$ – це n_{12} і так далі. Ступені належності нечіткого відношення знаходять як $r_{ij} = \dfrac{n_{ij}}{n_1}$. Тоді матриця, що будується за апріорною інформацією, буде мати вигляд (1). Наочно дані розрахунків представлені на рис. 2.

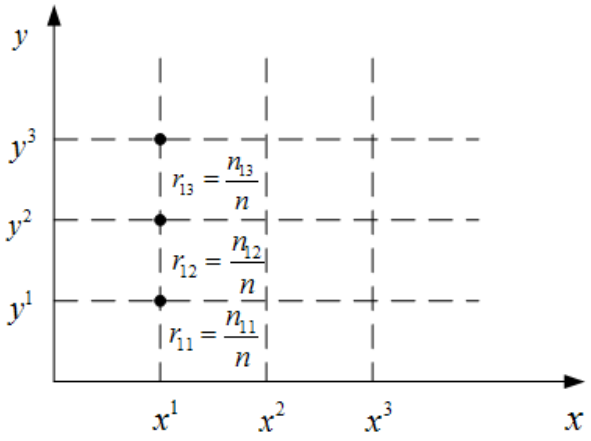


Рис. 2. Ілюстрація визначення ступенів належності нечіткого відношення

3. Використання нечіткого відношення для отримання прогнозованої оцінки за шкалою квазіпорядка

Прогнозування виходу може бути проведено за умов чіткої та нечіткої оцінки на вході. Для таких випадків:

1. Вхід подано чіткою оцінкою (прогноз для групи учнів). Прогнозований результат отримують у вигляді нечіткої оцінки з метою визначення рівня вимог до конкретної групи учнів або для конкретної матриці переходу, отриманої за експериментальними оцінками.
2. Вхід подано чіткою оцінкою учня за певною градацією шкали квазіпорядку. Є декілька матриць переходу (за різними рівнями і способами навчання). Розв'язується задача вибору або корекції індивідуальної траєкторії навчання.
3. Вхід подано нечіткою оцінкою учня, що отримана з урахуванням невизначеності рейтингової оцінки або за профілем учня. Вирішується задача вибору або корекції індивідуальної траєкторії навчання.

Прогнозування виходу $\underset{\sim}{B}$ може бути проведено за нечіткої вхідної оцінки $\underset{\sim}{A}$, де $\underset{\sim}{A}=\{x/\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\}$, $\underset{\sim}{B}=\{y/\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)\}$, де $x\in\underset{\sim}{A}$, $y\in\underset{\sim}{B}$ – градації шкали квазіпорядку на вході і виході відповідно, $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$, $\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)$ – функції належності оцінок до відповідних градацій шкали квазіпорядку.

Тоді нечітку оцінку $\underset{\sim}{B}$ можна отримати за композицією вхідної оцінки і нечіткого відношення, тобто

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\{y^1/\mu_{\underset{\sim}{B}}(y^1);\ \ y^2/\mu_{\underset{\sim}{B}}(y^2);y^3/\mu_{\underset{\sim}{B}}(y^3)\},$$

де
$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)=\underset{y\in\underset{\sim}{B}}{\vee}(\mu(x)\underset{x\in\underset{\sim}{A}}{\wedge}\mu(x,y)). \qquad (1)$$

Розглянемо першу задачу, коли прогнозується робота групи учнів. Як приклад, розглянемо ситуацію, коли множина n учнів складається з n_1 тих, що отримали оцінку x^1; n_2 тих, що отримали оцінку x^2; n_3 тих, що отримали оцінку x^3. Тоді нечітка оцінка входу:

$$\underset{\sim}{A}=\{x^1/\frac{n_1}{n};x^2/\frac{n_2}{n};x^3/\frac{n_3}{n}\}. \qquad (2)$$

Нехай, $n_1=7;n_2=13;n_3=5.$ Тоді $\underset{\sim}{A}=\{x^1/0.28;x^2/0.52;x^3/0.2\}$.

Для прикладу нечіткого відношення $\underset{\sim}{R}_1$, що відповідає певному способу засвоєння матеріалу отримуємо :

$$\underset{\sim}{B}_1 = \underset{\sim}{A} \circ R_1(x,y) = \{x^1 / 0.28; x^2 / 0.52; x^3 / 0.21\} \circ \begin{Vmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{Vmatrix} =$$

$$= \{y^1 / 0.3; y^2 / 0.52; y^3 / 0.2\}.$$

Після нормалізації $\mu_{\underset{\sim}{B}}^{H}(y) = \dfrac{\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)}{\sum \mu_{\underset{\sim}{B}}(y)}$ отримуємо

$\underset{\sim}{B}_1 = \{y^1 / 0.29; y^2 / 0.51; y^3 / 0.2\}$.

Тобто вихідні оцінки практично збігаються з вхідними і вимоги при вербальному оцінюванні «середні».

Якщо вимоги при оцінюванні більш «жорсткі», що відображається матрицею переходу $\underset{\sim}{R}_2$:

$$\underset{\sim}{R}_2 = \begin{Vmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{Vmatrix},$$

то за тим же входом отримуємо нечітку оцінку, зсунуту в сторону менших оцінок :

$$\underset{\sim}{B}_2 = \{y^1 / 0.36; y^2 / 0.46; y^3 / 0.18\}.$$

Якщо вимоги більш «лояльні», що відображається матрицею переходу $\underset{\sim}{R}_3$:

$$\underset{\sim}{R}_3 = \begin{Vmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{Vmatrix},$$

то за тим же входом отримуємо нечітку оцінку, зсунуту в сторону більших оцінок :

$$\underset{\sim}{B}_3 = \{y^1 / 0.23; y^2 / 0.4; y^3 / 0.33\}.$$

Таким чином, проведений аналіз дозволяє визначитись з вимогами, які пред'являють до учнів, або використати такий підхід при прогнозуванні результатів за різними способами засвоєння дидактичного матеріалу.

Якщо вхід подано чіткою оцінкою x^i за певною градацією шкали квазіпорядку, то виходом буде відповідний рядок матриці переходу, тобто $\underset{\sim}{B}(y : x = x^i) = \{y / \mu_{\underset{\sim}{B}}(y)\}$.

Якщо є декілька матриць переходу, що відповідають різним способам засвоєння матеріалу $\underset{\sim}{R}_l(x,y), l = \overline{1,m}$, тоді відповідно отримуємо m

прогнозів у вигляді нечітких оцінок, що відповідають певному способу засвоєння матеріалу:

$$\underset{\sim}{B}_l = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{R}_l(x,y) = \underset{\sim}{R}_l(x^j,y) = \underset{\sim}{B}_l(y : x = x^j); l = \overline{1,m}.$$

Для системи з трьома способами засвоєння, яка досліджувалась, і відповідно з трьома матрицями переходу для оцінки x^2 («добре») було отримано наступні вихідні нечіткі оцінки (рис. 3.)

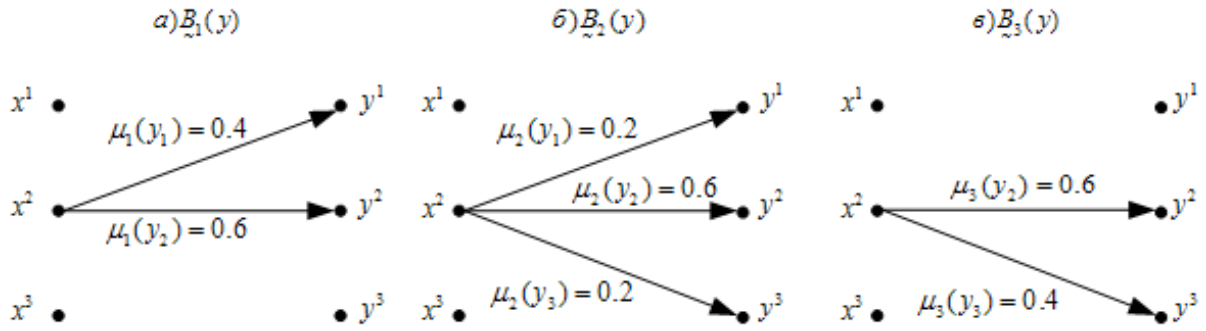


Рис. 3. Ілюстрація виходу при різних способах засвоєння матеріалу

За розглядом можливих траєкторій рис. 3 можна зробити наступні висновки: ймовірність отримання оцінки «добре» однакова за всіма трьома способами навчання і дорівнює 0,6. Але обравши перший (найбільш легкий) спосіб вивчення, учень може з ймовірністю 0,4 отримати оцінку нижче, тобто «задовільно». При обранні другого способу ймовірність отримання нижчої оцінки зменшується і з'являється можливість отримання вищої оцінки з ймовірністю 0,2. При обранні третього способу (з більшою затратою часу на вивчення) ймовірність отримання більшої оцінки збільшується до 0,4.

Якщо для прийняття рішення потрібна чітка оцінка, як адекватну статистику приймають моду нечіткої оцінки. В роботі [2] для отримання чіткої оцінки при прийнятті рішення на вербальній використовується операція дефазифікації за центром ваги. Зважаючи на відсутність відношення комбінування між проявами властивості, ця операція некоректна для даних, поданих за шкалою квазіпорядку.

Якщо вхід подано нечіткою індивідуальною оцінкою, що отримана за рейтинговою оцінкою з урахуванням її невизначеності [3] з метою вибору або корекції індивідуальної траєкторії, тоді відповідно m способам засвоєння отримуємо m вихідних нечітких оцінок

$B_l = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{R}_l(x,y), l = \overline{1,m}$ з використанням (1).

Якщо враховується розмитість оцінки за шкалою квазіпорядку, то, наприклад, у порівнянні з чіткою оцінкою x^2 в даному випадку можна отримати вхід $\underset{\sim}{A} = \{x^1 / 0.1; x^2 / 0.8; x^3 / 0.1\}$. За входом $\underset{\sim}{A}$ і трьома матрицями переходу отримуємо три прогнозовані виходи:

$$\underset{\sim}{B}_1(y) = \{y^1 / 0.36; y^2 / 0.55; y^3 / 0.09\};$$

$$\underset{\sim}{B}_2(y) = \{y^1 / 0.2; y^2 / 0.6; y^3 / 0.2\};$$

$$\underset{\sim}{B}_3(y) = \{y^1 / 0.09; y^2 / 0.55; y^3 / 0.36\},$$

за якими можна обирати чи корегувати індивідуальну траєкторію навчання. При порівнянні з оцінками рис. 3 видно, що оцінки стають більш розмитими у відповідності з більшою розмитістю вхідних оцінок. Якщо вхід задано профілями учня (наприклад, дані про його успішність за попереднє навчання) нечітку оцінку отримують за формулою (2) для одного учня.

4. Використання нечіткого відношення для вибору індивідуальної траєкторії або надання рекомендацій щодо способів вивчення модулів курсу

Використовуючи матриці переходу можна отримати необхідні відомості для вибору індивідуальної траєкторії або отримати рекомендації щодо вивчення модулів курсу. Наприклад, для початкового рівня $x_0 = x^i$ можна визначити умовні ймовірності отримання результату y^j за певним способом навчання U^l, тобто $P(x^i y^j / U^l)$. Наприклад, для пари x^2 («добре») і y^3 («відмінно») умовна ймовірність при першому способі навчання $P(x^2 y^3 / U^1) = 0$, при другому $P(x^2 y^3 / U^2) = 0.2$, при третьому $P(x^2 y^3 / U^3) = 0.4$. В залежності від власної мотивації учень може вибрати той чи інший спосіб навчання. Інформація для вибору у вигляді умовних ймовірностей може бути надана. Якщо мета відповідає градації y^3, то спосіб освоєння матеріалу обирають за максимом умовної ймовірності, тобто в даному випадку U^3.

Висновки

Вважаючи на те, що сучасний етап розвитку систем комп'ютеризованого навчання характеризується використанням персоніфікованих систем навчання, або систем з забезпеченням індивідуальної траєкторії навчання, в статті проведено аналіз системи з використанням характеристик вхід–вихід структурних дидактичних одиниць системи у вигляді матриць переходу або нечітких відношеннь.

Розглянуто способи отримання матриць переходу за апріорною інформацією або за експертним оцінюванням. Дані матриць, з одного боку, відображають вимоги до контролю рівня навченості, а з іншого боку, відображають можливість успіху при певному способі засвоєння матеріалу. Внаслідок цього матриці переходу можуть бути використані для прогнозування оцінки рівня знань на виході за входом і обраним способом засвоєння матеріалу.

Розглянуто структуру системи дистанційного навчання, що забезпечує формування індивідуальної траєкторії за рахунок виконання певних умов: структуризації за дидактичними одиницями–модулями, виділення декількох способів засвоєння матеріалу, математичного забезпечення у вигляді матриць переходу між модулями за умов певного способу навчання, забезпечення взаємодії між входом матриці (чіткою або нечіткою оцінкою за шкалою квазіпорядку) і матрицею переходу.

Проведено аналіз використання нечіткого відношення для отримання прогнозованої оцінки за різними учбовими ситуаціями: нечітка оцінка входу (груповий прогноз), чітка і нечітка оцінка одного учня (вибір або корекція індивідуальної траєкторії). Аналіз проведено за умов вербальної шкали оцінок учнів з дотриманням допустимих перетворень для даної шкали.

Список використаної літератури

1. *Huey–Ing, Min–Num Yang*. Qol Guazanted Adaptation and Personalization in E–Learning Systems // IEEE Transactions on Education, 2005, voe 48, No 4, p.676.
2. *Полещук О.М*. Методы предварительной обработки нечеткой экспертной информации на этапе ее формализации // Вестник государственного университета леса – Лесной вестник.– 2003 –N5(30) – с. 160 – 167.
3. *Яремчук Н.А. Сікоза О.М*. Аналіз переходу від рейтингової шкали до шкали порядку за умов поліморфізму // Наукові вісті – 2009 – N5 – с.96 – 103.
4. *Астанин С.В*. Сопровождение процесса обучения на основе нечеткого моделирования // Дистанционное образование – 200 – N5 – с. 27 – 32.

УДК 519.23

Е. В. Козыр

ЭТАПЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ПРИ МАЛЫХ ВЫБОРКАХ

Введение

Малые выборки широко используются для решения задач, связанных с испытанием статистических гипотез, особенно гипотез о средних величинах. Использование малых выборок в ряде случаев обусловлено характером обследуемой совокупности. Производственный и экономический эксперимент, клинические испытания, связанные с экономическими затратами, также проводятся на небольшом числе испытаний.

В выборках небольшого объема $n \le 30$ характер распределения генеральной совокупности сказывается на распределении ошибок выборки. Поэтому, существует проблема получения корректных результатов после обработки данных с помощью статистических критериев, рассчитанных на обработку больших объемов исследуемых данных.

Основные положения, а также статистические критерии, необходимые для обработки результатов измерений, описаны в [1]. Область применения ИСО 5725 – точность стандартизованных методов измерений, в том числе предназначенных для целей испытаний продукции, позволяющих количественно оценить характеристики свойств (показателей качества и безопасности) объекта испытаний. Именно поэтому результаты измерений характеристик образцов, взятых в качестве выборки из партии изделий, являются основой для получения результатов испытаний всей партии. Тем не менее, в [1] ничего не говорится о влиянии объемов выборок, на основе которых проводятся все дальнейшие вычисления, и ведется обработка данных с последующими выводами, на достоверность применяемых статистических критериев обработки.

В работе [2] была исследована проблема влияния количества исследуемых групп данных и их объемов на мощность критерия Кохрена, предложена статистическая оценка мощности (СОМ) критерия Кохрена

Стандарт [1] не позволяет его пользователям ориентироваться в том, какой из критериев является предпочтительней, какой из них оказывается наиболее мощным, против каких альтернатив и при каких объемах выборок конкретный критерий обладает преимуществом или наоборот. Поэтому представляет исследовательский интерес задача определения зависимости между объемом обрабатываемой выборки и корректностью полученных выводов при применении конкретного критерия, а также обратная задача, обработка заданного количества данных, полученных по малым выборкам, и степень достоверности полученных результатов.

Постановка задачи

Целью исследования является разработка алгоритма определяющего последовательность действий исследователя при обработке данных малого объема, сравнительный анализ зависимостей мощностей критериев Граббса и Кохрена от объема исследуемых данных и решение проблемы выбора критерия в заданных условиях.

Определение аномальных значений в выборках малого объема

Первым этапом после получения результатов измерений является проверка на наличие аномальных значений, так называемых «выбросов», которые могут исказить истинную картину распределения данных в выборке. Для этой цели в [1] рекомендуется использовать критерий Кохрена при проверке внутрилабораторных расхождений и критерий Граббса при проверке межлабораторных расхождений. Однако конкретных доводов, почему это так не приводится. Критерий Граббса еще рекомендуется использовать в качестве критерия сравнения средних значений выборок между собой, а также для анализа данных в пределах одной лаборатории, для которой в результате проверки с использованием критерия Кохрена обнаруживается сомнительность значения стандартного отклонения.

В статье рассмотрены ситуации использования критериев Кохрена и Граббса при малых объемах выборок. А именно, смоделирована ситуация получения лабораториями равного количества результатов измерений – от 3 до 10 измерений в каждой, $A = \begin{bmatrix} a_{11}...a_{1i} \\ ..... \\ a_j...a_{ji} \end{bmatrix}$. Выборки независимы, и не содержат аномальных значений, что подтверждалось проверкой того, что все значения лежат в пределах 2σ. Определяется максимальное значение по всем данным – $\max(A_{ij})$, причем это значение еще не является выбросом. Затем мы вводим искусственный выброс заменой $new = \max(A_{ij}) + k * \sigma$, величина k определялась минимальным значением, необходимым для того, чтобы новое максимальное значение выходило за рамки 2σ, после чего выброс определялся с помощью критерия Кохрена, по всем лабораториям

$$C = \frac{s^2_{\max}}{\sum_{i=1}^{p} s^2_i},$$

а так же с помощью критерия Граббса, применительно к каждой из лабораторий, проводилась проверка максимального значения в выборке

$$G_j = \frac{(a_{\max j} - \bar{a}_j)}{s_j}.$$

При этом были получены ситуации, в которых критерий Граббса безошибочно определял введенный выброс, в то время как критерий Кохрена не чувствовал его, поскольку выборка, содержащая выброс, не всегда имеет наибольшую дисперсию.

Методом Монте–Карло были получены и усреднены данные для 1000 смоделированных ситуаций, по этим данным построена круговая диаграмма, отображающая количество определенных выбросов каждым из критериев по отношению к общему количеству смоделированных ситуаций.

Величины P_{grabbs} и $P_{kochren}$ – это частоты определения каждым из сравниваемых критериев выброса по отношению к общему количеству смоделированных случаев (1000 случаев): $P_{grabbs} = \frac{N_{grabbs}}{1000}$ и $P_{kochren} = \frac{N_{kochren}}{1000}$.

Как видно из рис. 1, критерий Кохрена определяет искусственно введенный выброс в 84% случаев, тогда как критерий Граббса не чувствует выброс. Нечувствительность критерия Граббса к выбросу при объеме выборки в 3 элемента обусловлено влиянием, вносимым в выборку выбросом [3].

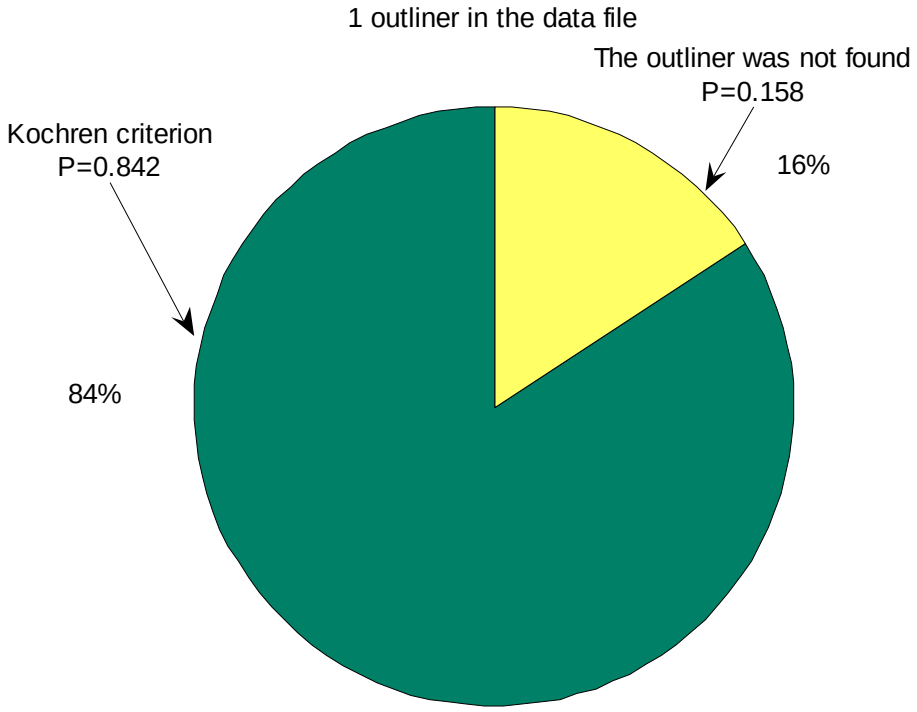


Рис. 1. Сравнительный анализ критериев Кохрена и Граббса:
количество лабораторий 3, количество измерений в каждой 3

На рис. 2 представлена аналогичная диаграмма, для 5 лабораторий, реализующих по 5 измерений каждая, и здесь критерий Граббса имеет большую чувствительность, определяя выброс в 21% случаев, тогда как критерий Кохрена только в 13%. Это означает, что в данном случае критерий Граббса может быть использован наравне с критерием Кохрена.

Но подобный выигрыш может быть получен при более значительных временных затратах, нежели при использовании критерия Кохрена, позволяющего сразу охватить весь объем исследуемых данных. Поэтому, в любом случае при выборе статистического критерия для обработки данных следует исходить из конкретно поставленной задачи и объема обрабатываемых данных.

Результаты, полученные для 7 лабораторий по 7 измерений в каждой, показывают, что вносимый выброс не оказывает существенного влияния на разброс данных при большом количестве результатов, что затрудняет его определение с помощью критерия Кохрена.

Рассмотренные результаты моделирующих экспериментов сведены в таблице.

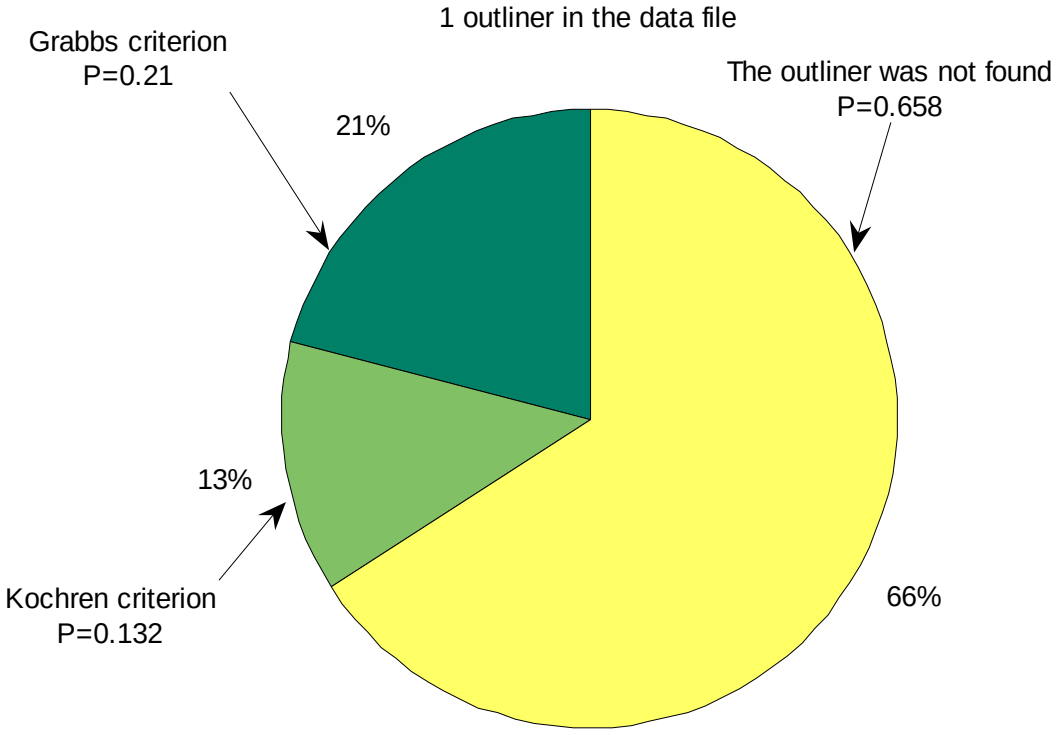


Рис. 2. Сравнительный анализ критериев Кохрена и Граббса:
количество лабораторий 5, количество измерений в каждой 5

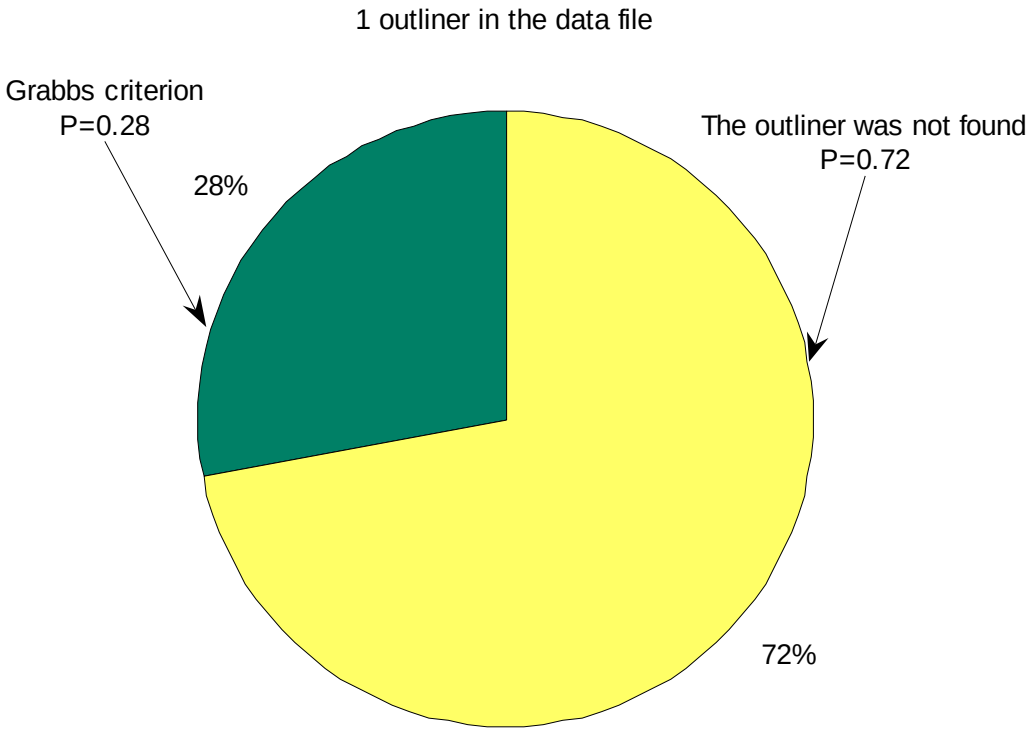


Рис. 3. Сравнительный анализ критериев Кохрена и Граббса: количество лабораторий 7, количество измерений в каждой 7

Таблица.

Мощность критериев Кохрена и Граббса в зависимости от объема сравниваемых выборок

n	3	4	5	6	7
критерий Граббса	$P \to 0$	$P = 0.158$	$P = 0.21$	$P = 0.214$	$P = 0.28$
критерий Кохрена	$P = 0.84$	$P = 0.504$	$P = 0.13$	$P = 0.012$	$P \to 0$

Из таблицы четко просматривается изменение вероятности определения выброса с изменением объема выборки, что можно использовать при выборе одного из сравниваемых критериев для дальнейшего использования.

На основе полученных результатов, в алгоритме, представленном на рис. 4, критерий Граббса был поставлен на один уровень с критерием Кохрена, для случая определения аномальных значений в выборке и ориентироваться при выборе одного из критериев необходимо на размер исследуемых выборок.

Возвращаясь к рекомендации в [1], об использовании критерия Граббса для нахождения межлабораторных расхождений, можно сделать предположение о том, что она основана на использовании опорного среднего значения вместо идеального, а опорное среднее, в свою очередь, приближается к идеальному значению при увеличении числа обрабатываемых данных. Поэтому при обработке малых выборок более целесообразным является сравнение средних значений исследуемых лабораторий по отношению к общему среднему по всем данным.

Алгоритм обработки данных для выборок малого объема

Как уже рассматривалось выше, результаты, полученные с помощью критериев Кохрена и Фишера, являются зависимыми от количества измерений в лабораториях. Проблемой критерия Граббса для выборок малого объема является его неспособность определить выброс при количестве элементов в выборке равное трем [3], однако именно критерий Граббса является более чувствительным к выбросу с ростом числа элементов в выборке. На рис. 4 приведен общий алгоритм этапов обработки результатов измерений.

Следующим этапом после выявления аномальных значений в выборках является сравнение средних значений, и для этого чаще всего используется критерий Стьюдента. Однако способность критерия Стьюдента различать расхождение между средними значениями также зависит от объема исследуемых выборок [4]. Например, для минимального объема выборки в 2 элемента, для того, чтобы получить результат о различии между средними с вероятностью $P = 0.95$, разница между средними должна быть $\mu_1 - \mu_2 > 2.5\sigma$, т.е. при одинаковых дисперсиях центры распределений находятся в зоне между 2σ и 3σ, т.е. в зоне наибольших допустимых отклонений друг от друга. Поэтому при использовании критерия Стьюдента, исходя из имеющегося количества данных, можно определить, каким должно быть различие между средними значениями, для того чтобы критерий определил его с необходимым уровнем вероятности ($P = 0.8; 0.9; 0.95; 0.99$).

Критерий Колмогорова – Смирнова, как и многие другие критерии, основан на предельном распределении некоторой статистики при бесконечном увеличении объёмов выборок. Поэтому уровень значимости, с которым используется тест при малых объёмах выборок, весьма приблизи-

тельно отражает вероятность реальной ошибки при отклонении основной гипотезы.

Выводы

Проведенное исследование показало, что результаты обработки данных, полученные при использовании критериев Кохрена, Граббса и Стьюдента являются зависимыми от объемов исследуемых выборок. А именно, определена не способность критерия Граббса, идентифицировать выброс при выборке в 3 элемента, однако при увеличении числа элементов в выборке уже именно критерий Граббса является более чувствительным к выбросу, что позволяет использовать его не как дополнительный инструмент проверки после применения критерия Кохрена, а наравне с ним.

Полученный результат дает возможность, определить какой из критериев, Кохрена или Граббса, может быть применен для выявления аномального значения в имеющихся объемах данных и с какой мощностью, или же, исходя из требуемой мощности, определить необходимое количество элементов выборок и критерий для их обработки.

Разработанный алгоритм позволяет исследователю выбирать на каждом этапе обработки данных, какой из критериев оказывается предпочтительней и при каких условиях.

Дальнейшее изучение методов обработки малых выборок (до 30 элементов) позволит избежать получения недостоверных результатов, как следствие некорректного использования статистических критериев, рассчитанных на большие объемы данных.

Список использованной литература

1. ГОСТ ИСО 5725–2–2002–1 Точность (прецизионность и правильность) результатов измерений. Часть 2. Основной метод определения повторяемости и воспроизводимости стандартного метода измерений.
2. Еременко В.С., Мокийчук В.М., Самойличекно О.В. Исследование мощности критерия Кохрена при ограниченном числе наблюдений // Системы обработки информации, – 2007. –№6(64) – С.35–38.

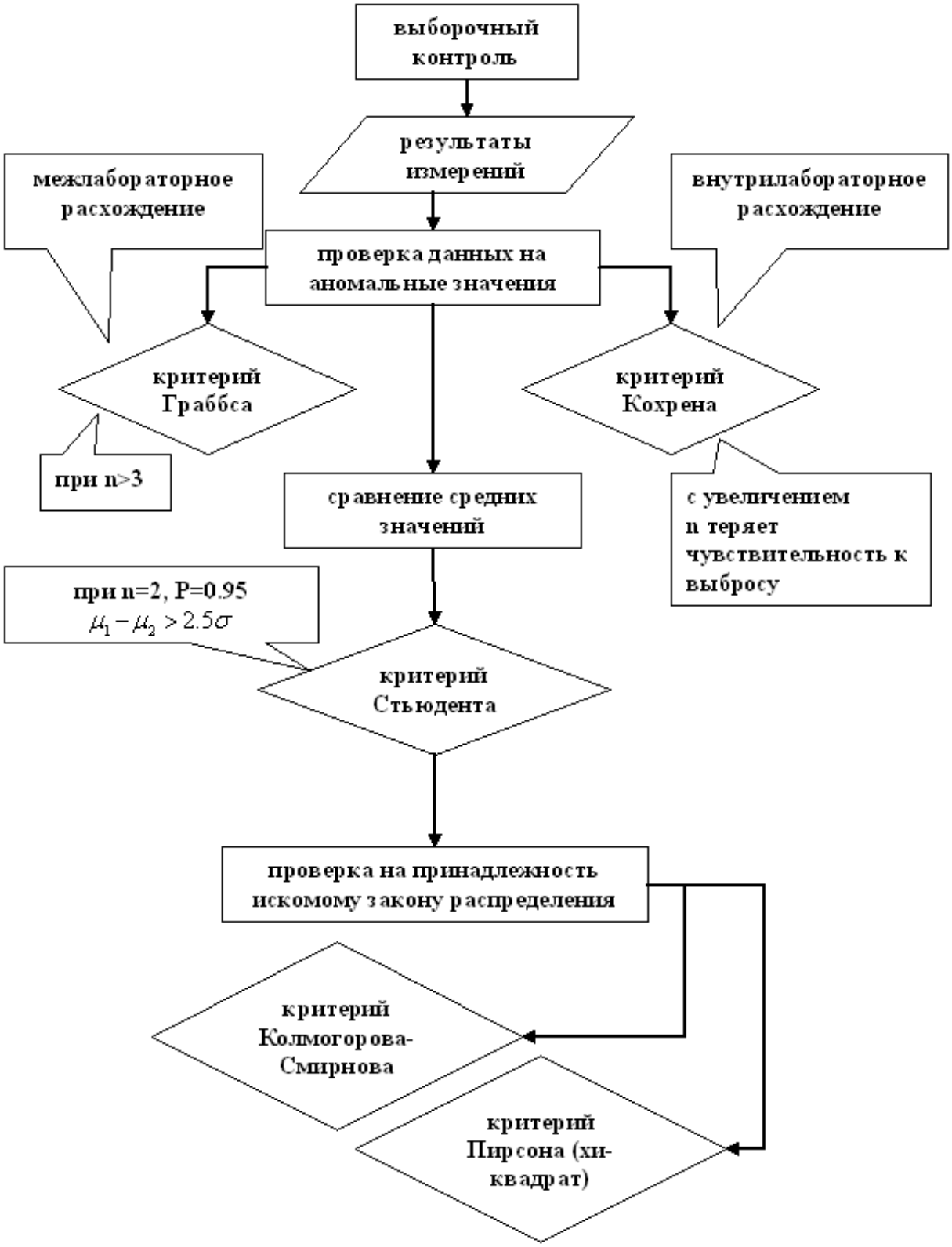


Рис. 4. Алгоритм обработки данных

3. Володарский Е.Т., Козыр Е.В. Границы применимости вероятностно–статистических критериев в условиях малых выборок //6 международная конференция Гиротехнологии, навигация, управление движением и конструирование авиационно–космической техники. Сборник докладов. Часть 2/К..НТУУ «КПИ», 26–27 апреля 2007. –С.70.
4. Володарский Е.Т., Козыр Е.В. Влияние объема выборки при проведении контрольно–сличительных испытаний // Вестник Хмельницкого национального университета, Том 1 – 2007. – №3 – С.147–149.
5. Смирнов Н.В., Дунин–Борковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М.: Наука, 1965.–511с.
6. Гришин В.К. Статистические методы анализа и планирования экспериментов. Издательство Московского университета, 1975. – 127с.
7. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных, М.: Мир, 1980. – 610с.

УДК 532.517

О. В. Микитченко, О. П. Мариношенко

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИХРОВОГО РУХУ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

Вступ

Вирішення задачі щодо моделювання вихрового руху середовища з метою штучного створення та подальшого застосування в практичних цілях вихрових рухів суцільного середовища, наприклад, при проектуванні перспективних двигунів та елементів перспективних рухомих механічних об'єктів, є актуальною та важливою науково-технічною задачею сьогодення.

Вихрові двигуни є новим та перспективним напрямком в двигунобудуванні. В основі створення такого двигуна є штучне утворення вихору та використання ефекту його самопідтримки.

Створення двигуна на основі вихрового принципу руху робочого тіла дозволить зменшити витрати енергоносіїв, а в майбутньому перейти на альтернативні види палива.

Постановка задачі

Основою роботи вихрового двигуна є штучне утворення всередині об'єму двигуна вихрового руху робочого тіла. Для виводу математичної моделі вихрового руху необхідно розглянути питання щодо утворення вихору в замкненому об'ємі. В даній статті на основі власних теоретичних досліджень та аналізі досліджень інших авторів необхідно проаналізувати та обґрунтувати математичну модель вихрового руху робочого тіла безлопасного двигуна, а також виникнення явища само підтримки вихору, що створюється в робочому об'ємі двигуна, визначити та дослідити особливості траєкторій руху робочого тіла.

Рівняння руху робочого тіла вихору

В якості середовища для дослідження вихрового руху будемо обирати ідеальну рідину.

В загальному випадку тривимірний рух ідеальної рідини задається полем течії, що визначається вектором швидкості $\vec{\Omega} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$, де u, v, w – проекції швидкості на осі прямокутної системи координат, тиском p, густиною ρ.

Для опису руху рідини необхідно записати три рівняння руху та рівняння нерозривності, яке в загальному випадку буде мати наступний вигляд [1]

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho div\vec{\Omega} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{\Omega}) = 0,$$

де $\frac{D\rho}{Dt}$ – субстанціальна похідна, що складається з локальної похідної $\frac{\partial\rho}{\partial t}$, яка враховує нестаціонарний рух рідини, і конвективної похідної $\Omega = grad\rho$, яка враховує переміщення матеріальних частинок рідини.

Рівняння руху в векторній формі можна представити у наступному вигляді

$$\rho\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} = \vec{K} + \vec{P}, \qquad (1)$$

де $\vec{K} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z$ – вектор масових сил, $\vec{P} = \vec{i}P_x + \vec{j}P_y + \vec{k}P_z$ – вектор поверхневих сил.

Розпишемо детальніше вектор поверхневих сил, для цього виділимо в рідини матеріальну частинку у вигляді паралелепіпеда.

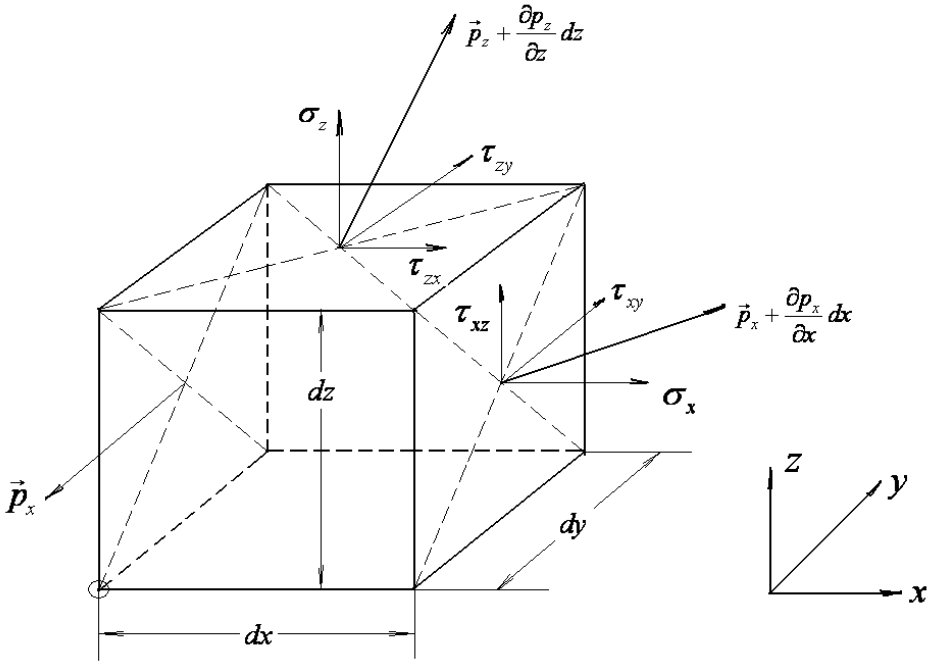


Рис. 1. Досліджувана частинка рідини

З рис. 1. можна записати складові результуючої поверхневої сили по координатним осям $\frac{\partial\vec{p}_x}{\partial x}dxdydz, \frac{\partial\vec{p}_y}{\partial y}dxdydz, \frac{\partial\vec{p}_z}{\partial z}dxdydz$ і розділивши на об'єм, отримаємо вираз для шуканої сили

$$\vec{P} = \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}, \tag{2}$$

де $\vec{p}_x = \vec{i}\sigma_x + \vec{j}\tau_{xy} + \vec{k}\tau_{xz}, \vec{p}_y = \vec{i}\tau_{yx} + \vec{j}\sigma_y + \vec{k}\tau_{yz}, \vec{p}_z = \vec{i}\tau_{zx} + \vec{j}\tau_{zy} + \vec{k}\sigma_z$ (3)

Підставляючи вираз (3) в (2), отримаємо

$$\vec{P} = \vec{i}(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}) + \vec{j}(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}) + \vec{k}(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}).$$

Після підстановки останнього виразу в рівняння (1), отримуємо скалярні рівняння руху рідини в проекціях на осі обраної декартової системи координат

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= X + (\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}),\\
\rho\frac{Dv}{Dt} &= Y + (\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}),\\
\rho\frac{Dw}{Dt} &= Z + (\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}).
\end{aligned} \tag{4}$$

Для подальшого виводу рівнянь руху досліджуваної матеріальної частинки рідини (з врахуванням сил в'язкого тертя) будемо використовувати співвідношення Стокса [1, 2]

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{'} &= -\frac{2}{3}\mu div\Omega + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\\
\sigma_y^{'} &= -\frac{2}{3}\mu div\Omega + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\\
\sigma_z^{'} &= -\frac{2}{3}\mu div\Omega + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{5}$$

де μ – коефіцієнт в'язкості; $\sigma_x^{'} = \sigma_x + p, \sigma_y^{'} = \sigma_y + p, \sigma_z^{'} = \sigma_z + p$.

Тоді складові результуючої сили $\vec{P}$ через проекції швидкості u, v, w можна виразити наступним чином

$$P_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu div\Omega) + \frac{\partial}{\partial y}[\mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial z}[\mu(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})],$$

для запису проекцій P_y та P_z необхідно використовувати правило циклічної перестановки індексів.

Остаточно отримуємо основні рівняння руху неідеальної в'язкої рідини

$$\rho\frac{Du}{Dt}=X-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}[\mu(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}div\Omega)]+\frac{\partial}{\partial y}[\mu(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})]+\frac{\partial}{\partial z}[\mu(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z})],$$

$$\rho\frac{Du}{Dt}=Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}[\mu(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}div\Omega)]+\frac{\partial}{\partial z}[\mu(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})]+\frac{\partial}{\partial x}[\mu(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})],$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}[\mu(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}div\Omega)]+\frac{\partial}{\partial x}[\mu(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z})]+\frac{\partial}{\partial y}[\mu(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})]. \quad (6)$$

Для випадку нестисливої рідини з постійним коефіцієнтом в'язкості рівняння (6) запишуться у вигляді

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})=X-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}),$$

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z})=Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}),$$

$$\rho(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z})=Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}). \quad (7)$$

Для зручності подальшої роботи рівняння (7) запишемо в циліндричних координатах, позначивши через r,φ,z – радіальну, осьову та кільцеву координати, а через v_r,v_φ,v_z – складові швидкості в проекціях на осі обраної циліндричні системи координат.

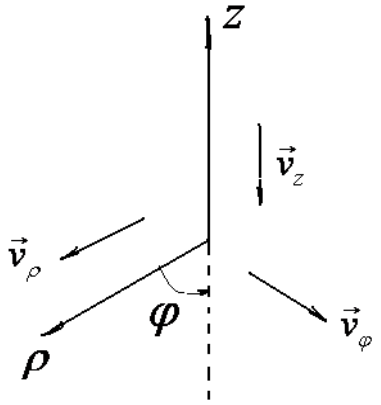


Рис. 2. Циліндрична система координат

В проекціях на осі обраної циліндричної системи координат диференційні рівняння руху рідини матимуть наступний вигляд

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}-\frac{v_\varphi^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=$$

$$K_\rho-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right),$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}-\frac{v_r v_\varphi}{r}+v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)=$$

$$K_\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right),$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial \rho}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=$$

$$K_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right). \qquad (8)$$

Обертальний рух рідини

Розглянемо рух рідини, що знаходиться поблизу диска, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω. В даному випадку ми розглядаємо тривимірну модель обертального руху рідини. Вид такого руху показано на рис. 3.

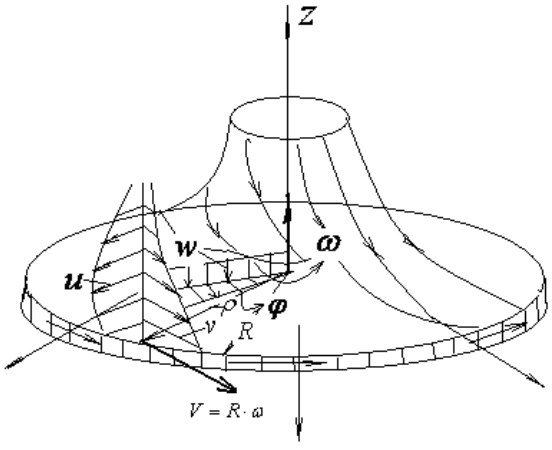


Рис. 3. Рух в околі диска, що обертається в рідині

Внаслідок осьової симетрії руху рідини рівняння (8) спрощуються до наступного вигляду

$$u\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{v^2}{r}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\upsilon[\frac{\partial^2 u}{ur^2}+\frac{\partial}{\partial r}(\frac{u}{r})+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}],$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{uv}{r}+w\frac{\partial v}{\partial z}=\upsilon[\frac{\partial^2 v}{ur^2}+\frac{\partial}{\partial r}(\frac{v}{r})+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}],$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\upsilon[\frac{\partial^2 w}{ur^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}],$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \qquad (9)$$

де υ – відносний коефіцієнт в'язкості рідини.

Рівняння руху рідини в компонентах вихору

Рівняння, що визначають неперервний рух матеріальної частинки ідеальної рідини, можна представити в спрощеному вигляді (не враховуючи коефіцієнта в'язкості і поверхневих сил). Рівняння руху ідеальної рідини в декартових координатах з врахуванням (7) мають наступний вигляд [2]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (10)$$

Система рівнянь руху рідини (10) дає зв'язок між діючими на рідину зовнішніми об'ємними силами, взаємними тисками її частинок і швидкостями останніх. Рівняння нерозривності в даному випадку має наступний вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0. \qquad (11)$$

Але цей зв'язок має суттєвий недолік, що не дозволяє відразу розділити усі можливі рухи рідини на два абсолютно різні за властивостями класи: невихровий і вихровий рухи.

Між тим поділ рухів рідини на вихровий та невихровий дає можливість встановити характерні властивості, загальні кожному їх класу, що дозволить в подальшому не лише глибше зрозуміти механічну суть багатьох особливостей, що спостерігаються при русі рідини, але й уяснити ті умови,

виконання яких дозволить здійснення руху рідини певного виду. Для цього представимо систему рівнянь руху рідини (10) в іншій формі.

Зазначимо той факт, що якщо через $W^2 = u^2 + v^2 + \omega^2$ позначити квадрат швидкості руху матеріальної частинки рідини, то часткове диференціювання цього виразу по координатах *x, y, z* дає нам вирази

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}W^2) = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{2}W^2) = u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial y},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{2}W^2) = u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z},$$

де $\frac{1}{2}W^2$ є деяка силова характеристика розглядуваної матеріальної частинки рідини. Позначимо наступні різниці

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}W^2), \quad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{2}W^2),$$
$$u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{2}W^2),$$

у вигляді

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} - w\frac{\partial w}{\partial x} = w(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) - v(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}),$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - u\frac{\partial u}{\partial y} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial y} = u(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) - w(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}),$$
$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - u\frac{\partial u}{\partial z} - v\frac{\partial v}{\partial z} - w\frac{\partial w}{\partial z} = v(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}) - u(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}).$$

Використовуючи позначення

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},\ 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},\ 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (12)$$

і віднімаючи від обох частин виразів (10) відповідно осям координат вирази $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}W^2), \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{2}W^2), \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{2}W^2)$ систему рівнянь руху (10) перепишемо у наступному вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t}+2(\eta w-\zeta v)=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}W^2),$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+2(\zeta u-\xi w)=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{2}W^2),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+2(\xi v-\eta u)=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{2}W^2). \qquad (13)$$

Рух рідини, описаний рівняннями (13), називається вихровим (вперше назвав Гельмгольц), а величини ξ,η,ζ компонентами вихору по осям X, Y, Z.

Запишемо формулу для секундного об'єму рідини, що відкидається на зовні від диску з однієї сторони

$$Q=2\pi R\int_{z=0}^{\infty}udz,$$

де R – радіус диска.

Обчислюючи інтеграл, отримаємо наступний вираз

$$Q=0{,}886\pi R^3\omega\,\mathrm{Re}^{-1/2}. \qquad (14)$$

Вихрові трубки

Для практичної реалізації вихрового руху пропонуємо використовувати матеріальне тіло – так звану вихрову турбіну, що має лопатки спіралевидної форми, як показано на рис. 4.

Для подальших досліджень розглянемо утворення і рух вихрових трубок.

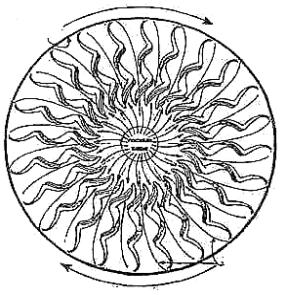


Рис. 4. Вид турбіни вихрового двигуна

Вважаємо, що утворення вихору всередині двигуна відбувається не лише завдяки обертанню диска, а й за рахунок утворення вихрових трубок на виході турбіни.

Розглядаючи малі вихрові трубки, припускаємо, що траєкторії їх руху мають форму тору, який характеризується двома параметрами – двома радіусами (тор – тіло обертання кола з радіусом r_1 навколо осі *Z–Z* та кола радіусом r_2 навколо точки O_2, як показано на рис. 5).

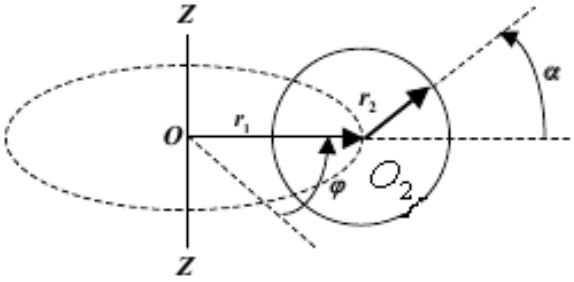


Рис. 5. Схема руху тору при $r_1 = r_2 = 1$.

Замкнені криві, що знаходяться на торі і не стягуються в точку, будемо називати тороїдами. Розрізняють два класи тороїд: тороїди поздовжнього типу, які стягуються до центру тору і тороїди поперечного типу, що охоплюють зовнішню границю тору. Доведено, що при вивертанні тору тороїди поздовжнього і поперечного типу міняються місцями [5]. Тор можна охарактеризувати спіралевидними тороїдами поздовжнього і поперечного типів, відповідні рівняння таких кривих в циліндричній системі координат мають наступний вигляд

$$\vec{\rho} = (1+\cos(\frac{\varphi}{\omega}))\vec{e} + \sin(\frac{\varphi}{\omega})\vec{k}, \quad \vec{\rho} = (1+\cos(\varphi\cdot\omega))\vec{e} + \sin(\varphi\cdot\omega)\vec{k}, \tag{15}$$

де ρ – радіус вектор, $\vec{e} = \vec{i}\cdot\cos(\varphi) + \vec{j}\cdot\sin(\varphi)$, ω – кількість витків тороїди, $\frac{\varphi}{\omega} = \alpha$ або $(\omega\cdot\varphi = \alpha)$ (рис. 4).

На основі виразів (15) бачимо, що для того щоб описати вивертання тору, необхідно в рівняння тороїди поздовжнього типу параметр ω замінити на протилежний $\frac{1}{\omega}$ і навпаки.

Розглянемо детальніше вираз (15) і приймемо для спрощення кількість витків $\omega = 1$, що відповідає опису однієї вихрової трубки, тоді при $\varphi = \alpha$, матимемо

$$\vec{\rho} = (\vec{i}\cdot\cos(\varphi) + \vec{j}\cdot\sin(\varphi)) + \cos(\varphi)(\vec{i}\cdot\cos(\varphi) + \vec{j}\cdot\sin(\varphi)) + \sin(\varphi)\cdot\vec{k}\,. \tag{16}$$

Зберемо подібні при одиничних ортах

$$\vec{\rho} = \vec{i}\cdot(\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)) + \vec{j}\cdot(\sin(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\varphi)) + \vec{k}\cdot\sin(\varphi). \tag{17}$$

Візьмемо похідну за часом від радіус–вектора, щоб виділити проекції швидкості на осі обраної циліндричної системи координат

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{i}[-\sin(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} - 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}] + \vec{j}[\cos(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} + \cos(2\varphi)\frac{d\varphi}{dt}] +$$
$$+ \vec{k}\cos(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}. \tag{18}$$

Вираз (18) описує рух однієї вихрової трубки. Але для диску, що зображений на рис. 3, необхідно врахувати, що вихрових трубок буде ω =24. Враховуючи вище сказане, вираз для введених кутових параметрів матиме наступний вигляд

$$\frac{\varphi}{24} = \alpha \quad \text{або} \quad \varphi \cdot 24 = \alpha,$$

де, $\alpha = \Omega r_2 t$, Ω – швидкість обертання точки рідини (диску турбіни) навколо осі Z.

Запишемо вирази для проекцій швидкості на осі декартової системи координат

$$V_x = -\frac{d\varphi}{dt}(\sin(\varphi) + \sin(2\varphi)),$$
$$V_y = \frac{d\varphi}{dt}(\cos(\varphi) + \cos(2\varphi)),$$
$$V_z = \frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi). \qquad (19)$$

Для проведення подальших досліджень необхідно виразити проекції швидкостей в циліндричній системі координат через відомі проекції в декартовій системі координат

$$u = V_\rho = V_x \cos(\varphi) + V_y \sin(\varphi),$$
$$v = V_\varphi = V_x \sin(\varphi) - V_y \cos(\varphi),$$
$$w = V_z = V_z. \qquad (20)$$

Звідси швидкості в циліндричній системі координат матимуть наступний вигляд

$$u = -\frac{d\varphi}{dt}\sin(\varphi),$$
$$v = -\frac{d\varphi}{dt}(1 + \cos(\varphi)),$$
$$w = \frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi). \qquad (21)$$

Остаточно математична модель вихрового руху рідини (13) з врахуванням (20) і (21) матиме наступний вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{d\varphi}{dt}\sin(\varphi))+2(\eta(\frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi))-\zeta(-\frac{d\varphi}{dt}(1+\cos(\varphi))))=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-$$

$$-(-\frac{d\varphi}{dt}\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{d\varphi}{dt}\sin(\varphi))-\frac{d\varphi}{dt}(1+\cos(\varphi))\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{d\varphi}{dt}(1+\cos(\varphi)))+\frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi))),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{d\varphi}{dt}(1+\cos(\varphi)))+2(\zeta(-\frac{d\varphi}{dt}\sin(\varphi))-\xi(\frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi)))=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-$$

$$-(-\frac{d\varphi}{dt}\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{d\varphi}{dt}\sin(\varphi))-\frac{d\varphi}{dt}(1+\cos(\varphi))\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{d\varphi}{dt}(1+\cos(\varphi)))+\frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial y}(\frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi))),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi))+2(\xi(-\frac{d\varphi}{dt}(1+\cos(\varphi)))-\eta(-\frac{d\varphi}{dt}\sin(\varphi))=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-$$

$$-(-\frac{d\varphi}{dt}\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{d\varphi}{dt}\sin(\varphi))-\frac{d\varphi}{dt}(1+\cos(\varphi))\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{d\varphi}{dt}(1+\cos(\varphi)))+\frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial z}(\frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi))).$$

Висновок

В статті на основі розглянутого підходу до виводу загальних рівнянь руху рідини розглянуто процес виникнення вихору в матеріальному середовищі, що обертається з певною кутовою швидкістю. В якості досліджуваного матеріального середовища в кінцевому рахунку розглядається ідеальна рідина. Вибір ідеальної рідини, як варіанту досліджуваного рухомого суцільного середовища пов'язаний з подальшою практичною реалізацією математичного моделювання процесу формування вихору.

Виведені рівняння руху рідини в декартовій та циліндричній системах координат в компонентах вихору, що дають змогу виділити вихровий та невихровий рухи рідини та описати процес вихроутворення. Розглянуто питання руху вихрових трубок та запропоновано конкретні рівняння їх траєкторії.

В подальшому авторами будуть розглянуті питання реалізації принципів утворення вихору при обертальному русі рідини в замкненому об'ємі, при цьому будуть розраховані основні параметри вихрового руху рідини, це дасть змогу показати та обґрунтувати в подальшому явище самопідтримки вихору.

Список використаної літератури

1. *Шлихтинг Г.* «Теория пограничного слоя», – М.: «Наука»,1974г.– 654стр.
2. *Милович А. Я.* «Теория взаимодействия тел и жидкости. 2–е издание, исправленное и дополненное».–Москва :Гос.изд. литературы по строительству и архитектуре, 1955г. – 311 стр.
3. *Пуанкаре А.* «Теория вихрей», – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000г.– 160 стр.

4. *Милович А. Я.* «Основы гидромеханики».–М.–Л.: Гос. Энергетич. Изд–во, 1946г.– 157 стр.

УДК.539.3

С.И.Трубачев, О.Н.Алексейчук

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Введение

Стержневые системы и стержни широко применяются в авиационной технике. В процессе работы стержни подвергаются значительному воздействию вибрационных нагрузок. В связи с различными условиями закрепления стержней большое значение имеет численный анализ колебаний указанных конструкций.

В настоящее время существует большое количество работ, посвященных колебанию стержней [1],[2]. Очень актуально исследование колебаний стержней переменного сечения [3], а также анализ влияния конусности или клиновидности на величину частот продольных или изгибных колебаний, что необходимо для частотного анализа конструкций , и не было исследовано до настоящего времени.

Исследование колебаний стержней переменного сечения приводят к построению решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые учитывают изменения поперечных сечений по длине. Сложность решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами обусловила недостаточное количество публикаций по этой тематике. Настоящая статья позволяет глубже изучить эту проблему.

Постановка задачи

При расчете на вибропрочность основная трудность заключается в определении спектра собственных частот и форм колебаний механической системы и, в общем случае, сводится к известной обобщенной задаче на собственные значения:

$$(Ku, v) = \omega^2 (Mu, v), \quad \forall\, v \in V, \tag{1}$$

где V – множество допустимых функций, $(Ku, v), (Mu, v)$ – семейство симметричных билинейных непрерывных форм, соответствующих ампли-

тудным значениям потенциальной и кинетической энергии системы, K - матрица жесткостей, M – матрица масс.

При решении задачи численными методами бесконечномерное пространство допустимых функций V заменяется конечномерным V_h путем дискретизации системы. При этом задача (1) заменяется приближенной: для заданного конечномерного пространства V_h необходимо найти такие значения ω, u_h, что

$$(Ku_h, v_h) = \omega^2 (Mu_h, v_h), \quad \forall\, v_h \in V_h, \tag{2}$$

с учетом кинематических граничных условий

$u_{ih} = \widehat{u_{ih}}$; где $\widehat{u_{ih}} \in \Gamma_u$.

При решении прикладных задач для стержневых систем наибольший интерес представляет несколько наименьших собственных частот и соответствующих им форм колебаний. Таким образом, приходим к неполной задаче на собственные значения. Поскольку эта задача является нелинейной, то целесообразно использовать численные методы.

Определение собственных частот

При продольных колебаниях стержня силы направлены вдоль прямолинейной оси, а напряжения и деформации распределены по площади сечения равномерно. Амплитудные значения потенциальной и кинетической энергии стержня выглядят таким образом:

$$П = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 dx; \;\; T = \frac{1}{2}\,\omega^2 \int_0^l \rho F\, u^2 dx\,, \tag{3}$$

здесь E – модуль Юнга; F – площадь поперечного сечения; ρ – плотность материала; l – длина стержня.

Продольные перемещения аппроксимируются линейным полиномом:

$$u(x) = u_i + \frac{u_j - u_i}{l}\, x\,, \tag{4}$$

где u_j и u_i – перемещения i – го и j–го узлов.

В случае изгибных колебаний стержня амплитудные значения потенциальной и кинетической энергии имеют вид:

$$П = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx; \;\; T = \frac{1}{2}\,\omega^2 \int_0^l \rho F\, w^2 dx\,, \tag{5}$$

В данном случае для аппроксимации перемещений используем полином 3–го порядка:

$$w(x) = \frac{w_i}{l^3}(2x^3 - 3x^2 l + l^3) + \frac{w_j}{l^3}(3x^2 l - 2x^3) + \varphi_i \frac{1}{l^2}(xl^2 - 2x^2 l + x^3) + \varphi_j \frac{1}{l^3}(x^3 - x^2 l). \quad (6)$$

Для решения задачи (2) использовался итерационный метод покоординатного спуска [4], применение которого позволяет избегать трудностей, связанных с формированием, хранением и оперированием с матрицами масс и жесткостей [5].

При продольных колебаниях стержня в форме клина или конуса первую собственную форму колебаний системы можно представить уравнением:

$$u_1(x_1) = \left(1 - \frac{x_1^2}{l^2}\right); \; EFu_1'(0) = u_1(l) = 0. \quad (7)$$

Физико–геометрические характеристики стержней изменяются по биномиальным законам [6]:

$$EF_1(x_1) = A(l_1 \pm x_1)^m; \; \rho F(x_1) = B(l_1 \pm x_1)^n; \quad A = EF_1 l_1^{-m}; \; B = \rho F_1 l_1^{-n}; \quad (8)$$

где конусность и приведенная длина соответственно равны [6]:

$$\lambda_1 = \frac{r_2}{r_1} > 1, \qquad l_1 = l(\lambda_1 - 1).$$

Для определения основной собственной частоты используется формула Релея:

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^l EF(u')^2 dx}{\int_0^l \rho F u^2 dx}. \quad (9)$$

Подставляя (7), (8) в (9), получим соответственно при n=1для клина и при n=2 для конуса:

$$\omega_1^2 = k_1^2 \frac{E}{\rho}, \quad (10)$$

где характеристические числа равны:

$$k_1^2 = \frac{10(4l_1 + 3l)}{(5l_1 + 16l)l^2}, \qquad n = 1;$$

$$k_1^2 = \frac{7(20l_1^2 + 30l_1 l + 12l^2)}{(8l^2 + 35l_1 l + 56l_1^2)l^2}, \qquad n = 2. \quad (11)$$

При изгибных колебаниях консольных стержней с биномиальными законами изменения сечений:

$$EI(x_1) = A(l_1 \pm x_1)^m; \;\; \rho F(x_1) = B(l_1 \pm x_1)^n; \tag{12}$$

$$A = EI_1 l_1^{-m}; \;\; B = \rho F_1 l_1^{-n}. \tag{13}$$

Первую форму колебаний можно представить приближенным уравнением

$$w(x_1) = (1 - \tfrac{x_1}{l})^2, \tag{14}$$

которое удовлетворяет только кинематическим граничным условиям:

$$w(0) = w'(0) = 0. \tag{15}$$

Формула Релея при изгибных колебаниях имеет вид:

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^l EI(w'')^2 dx}{\int_0^l \rho F w^2 dx}. \tag{16}$$

Подставляя (12), (14) в (16), получим для основной частоты формулы:

$$\omega_1^2 = \widetilde{\omega_1^2}\left[\frac{EI_1}{\rho F_1 l^4}\right] = \widetilde{\omega_1^2}\frac{1}{\lambda_1^2 l^4}\left[\frac{EI_2}{\rho F_2}\right] \tag{17}$$

в зависимости от величины конусности стержня и соотношения $EI_1/\rho F_1$.

В формулах (17) частотный параметр $\widetilde{\omega_1^2}$ выражается через приведенную l_1 и реальную l длины стержня так:

$$\widetilde{\omega_1^2} = \frac{30(4l_1^3 + 6l_1^2 l + 4l_1 l^2 + l^3)}{(6l_1 + l)l_1^2}, n = 1;$$
$$\widetilde{\omega_1^2} = \frac{84(5l^4 + 10l_1^4 l + 10l_1^2 l + 5l_1 l^3 + l^4)}{(21l_1^2 + 7l_1 l + l^2)l_1^2}, n = 2. \tag{18}$$

Оценим влияние конусности (клиновидности) стержня на основную частоту на числовых примерах.

Пример 1.

Найти основные частоты продольных колебаний конуса при конусности $\lambda_1 = 1; 1{,}2; 1{,}5; 2$.

По второй формуле (11) получим безразмерные значения характеристических чисел $k_1 l = 1{,}581; 1{,}711; 1{,}877; 2{,}09$. Подставив в формулу (9), можно получить соответствующие частоты.

Результаты расчета сравнивались с точным решением [6]:

$$k_1 L = 1{,}5; 1{,}688; 1{,}835; 2{,}03.$$

Пример 2.

Определить значения основных частот изгибных колебаний консольного клина при следующих значениях λ_1: $\lambda_1 = 1{,}2{,}4$.

По формуле (17) вычисляем значения частотного параметра

$$\widetilde{\omega_1} = 4{,}474; 4{,}08; 4{,}21; 5{,}48.$$

Точные значения частотного параметра, полученного в работе [6], следующие:

$$\widetilde{\omega_1} = 3{,}52; -; 4{,}00; 4{,}61.$$

Из результатов расчета видно, что с увеличением клиновидности (конусности) значения основной частоты тоже увеличиваются.

Выводы

В работе предложен один из методов решения задачи о колебаниях стержневых конструкций переменного сечения. Для определения динамических характеристик использовался вариационно–сеточный метод. Получены аналитические выражения для определения собственных частот для стержней переменного сечения. Исследовано влияние конусности на значения собственных частот, что дает возможность проектировать стержневые конструкции с заданными динамическими характеристиками.

Предложенный подход предполагается распространить на пространственные стержневые системы, состоящие из стержней переменного сечения.

Список использованной литературы

1. *Бабаков И. Н.* Теория колебаний.–М.: Наука, 1968.–559с.
2. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем.–М.: Машиностроение, 1070.– 734с.
3. *Василенко М. В., Алексейчук О. М.* Теорія коливань і стійкості руху.–К.: Вища шк., 2004,–549с.
4. *Бабенко А. Е.* Застосування і розвиток метода покоординатного спуску в задачах визначення напружено–деформованого стану при статичних та вібраційних навантаженнях. – К.: КПІ, 1996. – 96с.
5. *Бабенко А. Е., Бобырь Н. И., Бойко С. Л., Боронко О. А.* Применение и развитие метода покоординатного спуска в задачах определения напряженно–деформированного состояния при статических и вибраионных нагрузках. – К.: Инрес, 2005. – 264с.
6. *Динник А. Н.* Избранные труды. К.: из–во АН УССР, 1965, – 719с.

УДК 629.7.02

Д. М. Зінченко, Т. В. Драган

ОЦІНКА ВПЛИВУ ВІДХИЛЕНЬ ПОВЕРХНІ КРИЛА НАДКРИТИЧНОГО ПРОФІЛЮВАННЯ НА АЕРОДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІТАКА

Вступ

Актуальною проблемою авіації є різке зростання аеродинамічного опору крила та інших агрегатів літака при збільшенні швидкості руху. Теоретичні основи проектування та історія розвитку трансзвукової аеродинаміки викладені в роботі [1], але вплив відхилень та похибок виробництва не враховується. Аеродинамічне проектування є одним з початкових етапів створення літака, тому важливо саме тут закласти основи для створення моделей, максимально наближених до фактичних, урахувати можливі похибки при виготовленні, спрощення та вдосконалення відомих конструкторсько-технологічних рішень. Використання сучасних методів на етапі аеродинамічного проектування дозволяє зменшити час розрахунку, підвищити точність та оптимізувати модель при зміні вхідних параметрів [2].

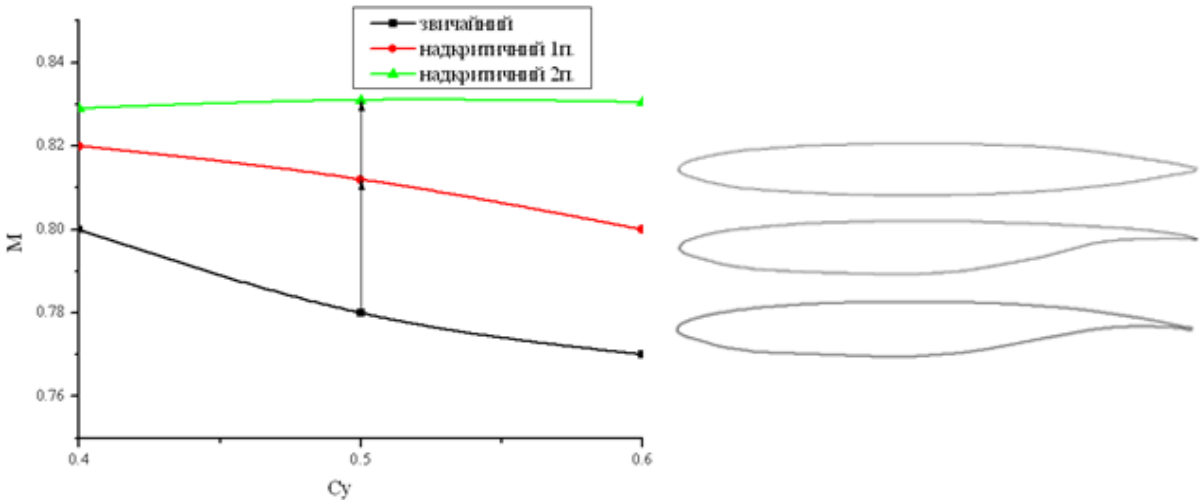


Рис. 1. Форма та зміна величини $M_{кр}$ для звичайного та надкритичного профілів I та II поколінь

Надкритичні профілі (рис. 1) дозволяють збільшити величину коефіцієнту підйомної сили на 0,05…0,12 або максимальну відносну товщину на (2÷5)% хорди профілю, тому використання цих профілів в компоновці стріловидних крил є одним з основних напрямків удосконалення аеродинамічних характеристик пасажирських і транспортних літаків. Але, незважаючи на переваги, надкритичні профілі мають складну геометрію, яку нелегко відтворити в умовах вітчизняного виробництва.

В джерелах не розглядається проблема невідповідності реальної і теоретичної моделі та вплив відхилень на аеродинамічні характеристики. Відомі сучасні інструменти проектування та розрахунку набагато випереджають засоби та можливості виробництва, і створені комп'ютерні моделі часто неможливо реалізувати на практиці. Наближення комп'ютерних моделей до реальних зразків допоможе зменшити час на оптимізацію і доводку та отримати літак з очікуваними параметрами.

Постановка задачі

Метою дослідження є забезпечення створення крила трансзвукового літака з заданими літально-технічними характеристиками з урахуванням можливостей виробництва. Проведена оцінка впливу дефектів і відхилень виробництва на аеродинамічні та літально-технічні характеристики літака дозволяє при проектуванні в майбутньому враховувати недоліки та створювати крила, що відповідають вимогам, з максимальною технологічністю конструкції. Дослідження базується на аналізі результатів, отриманих при розрахунку теоретичних моделей і фактичних обмірах дослідного зразка регіонального літака та визначенні причин відхилень основних аеродинамічних характеристик.

Числові методи мають широке використання в аеродинамічному проектуванні. Вони можуть бути використані не тільки для оцінки характеристик профілів заданої форми, але і для побудови нових форм з тими чи іншими потрібними аеродинамічними характеристиками. Для цього може бути використано розв'язання оберненої задачі обтікання профілю (визначення форми профілю, при обтіканні якого реалізується заданий розподіл тиску) [2].

Оцінка впливу відхилення геометрії на аеродинамічні характеристики

Для розрахунку використані теоретична модель і модель, побудована за фактичними обмірами дослідного літака. Для прикладу наведений профіль одного з контрольних перетинів крила. Фактичні контури профілю мають незначні відхилення від теоретичних (рис. 2). На рис. 3 наведені результати розрахунку даного профілю – залежності підйомної сили та крутного моменту від кута атаки на правій та лівій консолі фактичного крила при M=0,75. Слід зазначити, що навіть незначні невідповідності геометрії передньої кромки крила сприяють значним відхиленням аеродинамічних характеристик: створюють різну підйомну силу та крутний момент на правій та лівій консолі, що може спричиняти аварійні ситуації та вимагає компенсації цієї різниці органами керування.

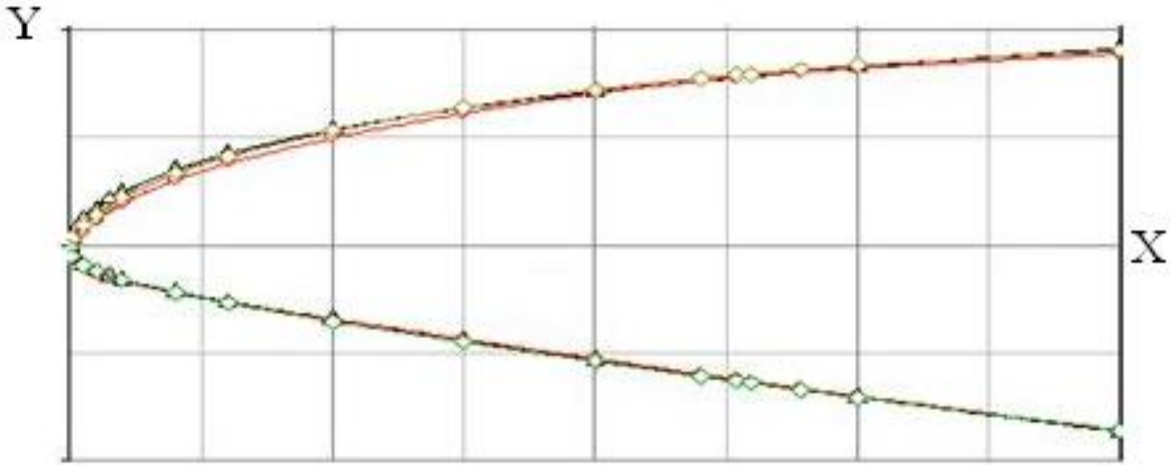


Рис. 2. Фактичний та теоретичний контур контрольного перетину

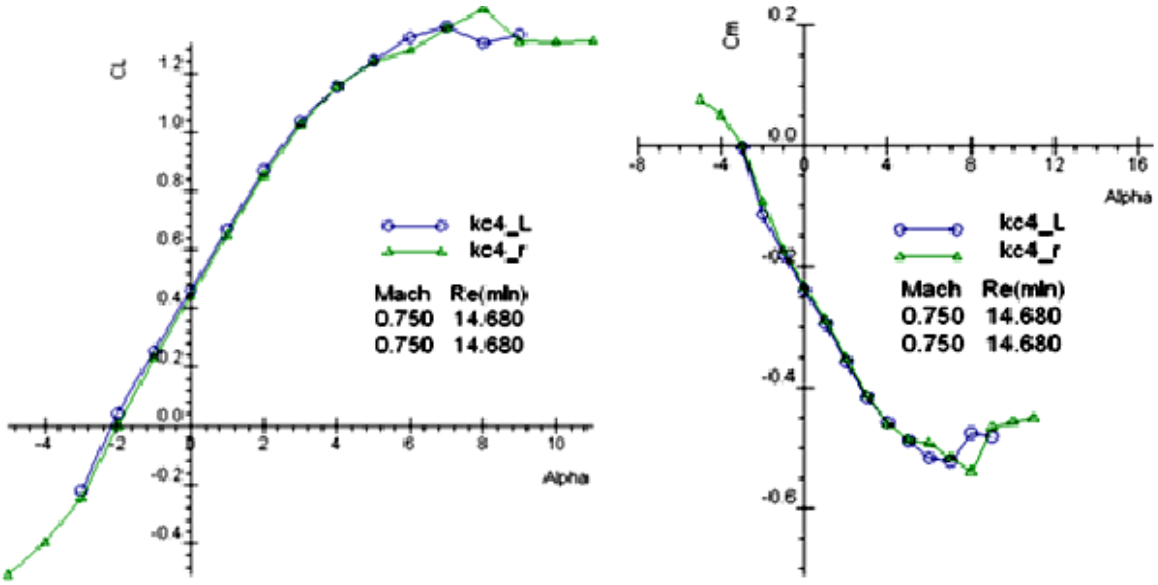


Рис. 3. Залежності підйомної сили та крутного моменту від кута атаки на правій та лівій консолі фактичного крила при M=0,75

На рис. 4 та рис. 5 приведені результати розрахунку тривимірного обтікання крила у вигляді епюр коефіцієнту тиску (C_p) в площині перерізів z = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6 та 0,7 теоретичного і фактичного (права і ліва консоль) профілів при M=0,78, C_y=0,45 та M=0,78, C_y=0,25 відповідно. Найбільші відхилення значень спостерігаються в районі передньої кромки. На графіках видно, що фактичні значення C_p істотно перевищують теоретичні і можуть бути причиною утворення стрибків ущільнення та несприятливого розподілу тиску по поверхні профілю.

На рис. 6 показано відмінність приросту опору за розмахом крила на правій і лівій консолі та приріст коефіцієнту опору ΔCx, викликаний ковзанням літака на відповідних кутах атаки.

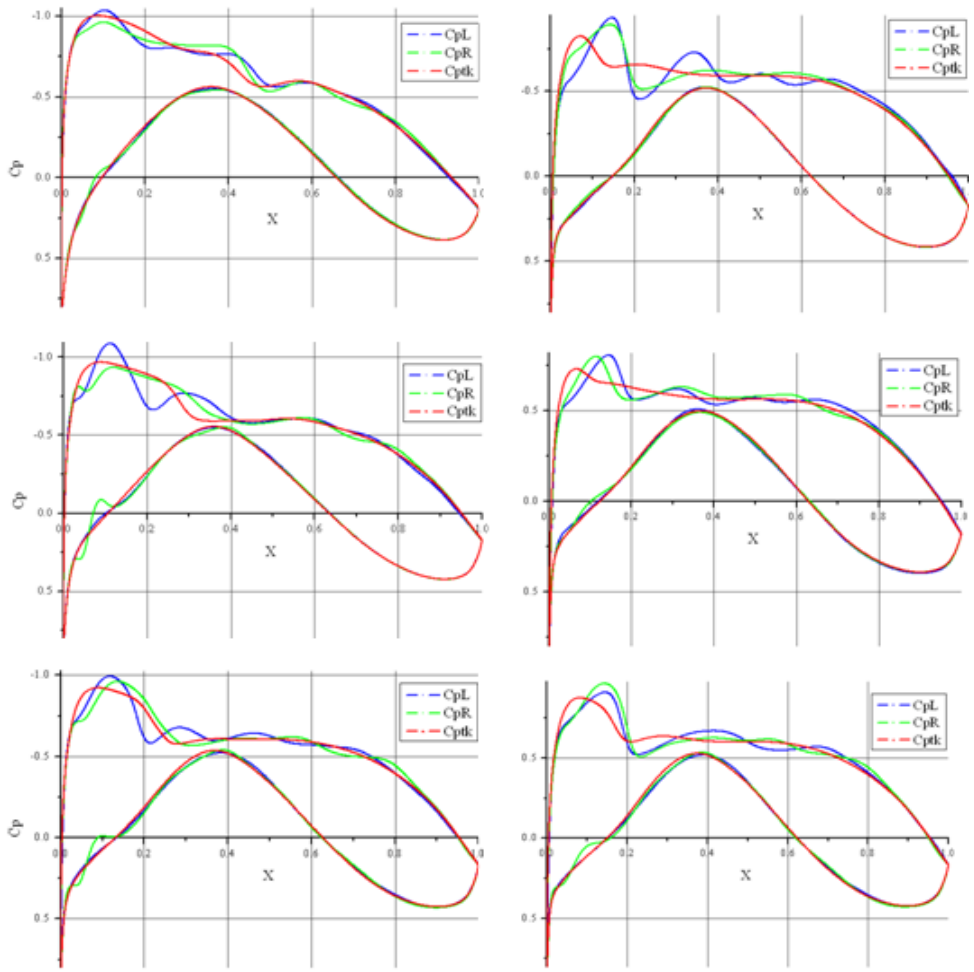


Рис. 4. Епюри коефіцієнту тиску теоретичного і фактичного (права і ліва консоль) профілів при M=0,78, C_y=0,45

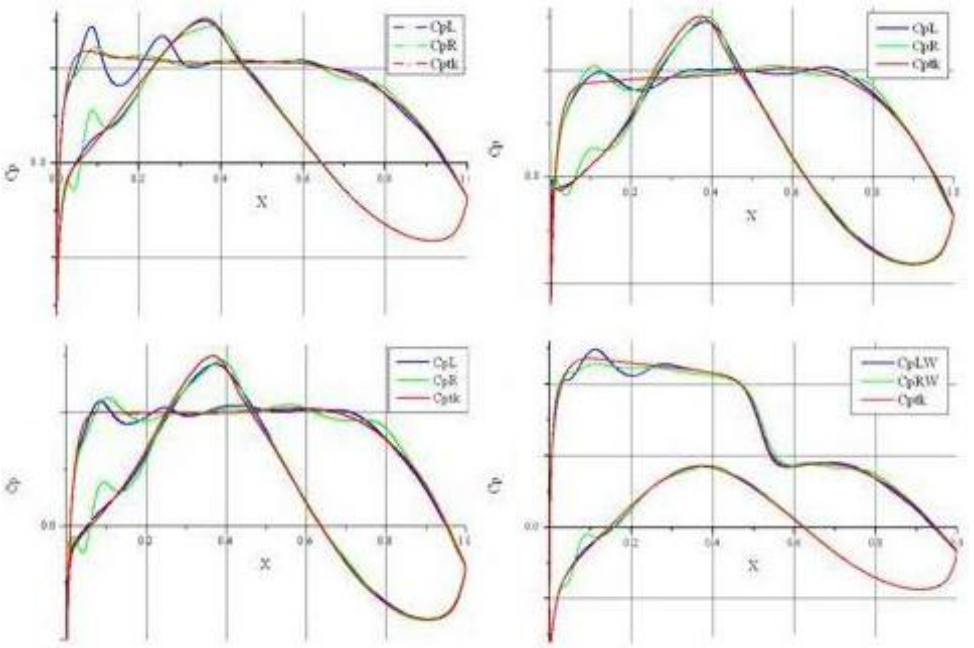


Рис. 5. Епюри коефіцієнту тиску теоретичного і фактичного (права і ліва консоль) профілів при M=0,78, C_y=0,25

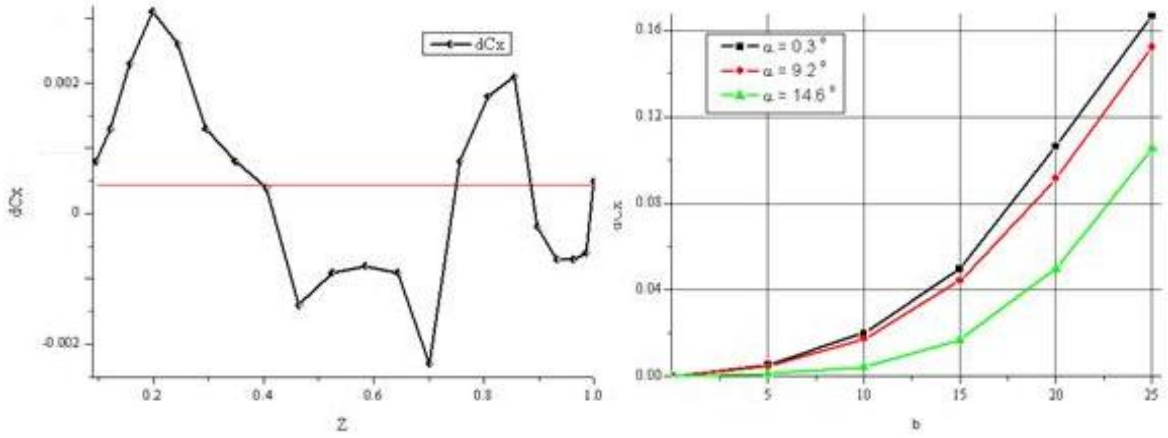


Рис.6. Відмінність приросту опору за розмахом та приріст коефіцієнту опору ΔCx на відповідних кутах атаки

Проблеми, що виникли в процесі льотних випробувань першого екземпляру регіонального літака, підтверджують зв'язок якості виготовлення передньої кромки крила із літними характеристиками.

Як виходить з аналізу епюр розподіленого тиску в перерізах крила, найбільший вплив на параметри обтікання має відхилення геометрії предкрилка від теоретичного контуру. Наочним є наявність стрибків ущільнення на крейсерському режимі польоту.

Загальні рекомендацій з проектування надкритичних профілювань

Проектування крил завжди складний багатоступеневий процес пошуку компромісу між вимогами аеродинаміки, технології, жорсткістю, аеропружністю та іншими дисциплінами. Задача аеродинамічного проектування крила – визначення форми в плані і параметрів аеродинамічної компоновки, що задовольняють літально-технічним характеристикам. Для забезпечення цих вимог в процесі аеродинамічного проектування необхідно:

- обирати швидкісні профілі з великим радіусом носка. Передня кромка має велике значення при створенні підйомної сили, розподілу тиску та уникнення стрибків ущільнення;
- по можливості проектувати крила з меншою кількістю контрольних перерізів;
- обирати профілювання і поверхні «невибагливі» до виготовлення та похибок виробництва;
- створювати аеродинамічні поверхні кривими другого порядку кривини, які простіше реалізувати на практиці;
- розглянути можливість заміни механізації передньої кромки (предкрилку) кореневим напливом. Це дозволить зменшити масу конструк-

ції, зробити її більш технологічною та простою в експлуатації та обслуговуванні.

Перспективним є створення конструкцій з композиційних матеріалів, які можуть використовуватися для високонавантажених деталей літаків (обшивки, лонжеронів, нервюр, панелей, лопаток двигунів), вузлів силових конструкцій, елементів жорсткості. Використання композиційних матеріалів забезпечують якісний крок у зменшенні маси апаратів та приладів [4, 5].

На А-380 композити складають 18% ваги літака, основа силової конструкції виконана з вуглепластику (рис. 7). Приклад високої ефективності використання композиційних матеріалів (50%) на літаку Боїнг-787:

- маса знижена на 45 т у порівнянні з аналогічним літаком А330-200 – з 180 т до 135 т;
- споживання палива літака знизилась на 20% у порівнянні з аналогами, що експлуатуються;
- витрати в розрахунку на пасажиромилю скоротились на 10%;
- прогнозований розмір економії витрат на техобслуговування 30%;
- фюзеляж із композитів забезпечив можливість збільшення ілюмінаторів на 65%.

Головна перевага композитів в тому, що матеріал створюється під конкретні задачі і може мати характеристики набагато кращі, ніж традиційні (висока питома міцність, жорсткість, легкість та ін.), а також дає змогу виготовляти монолітні конструкції складних форм. Недоліки: висока вартість, анізотропія властивостей, наукоємність виробництва, необхідність спеціального обладнання та сировини.

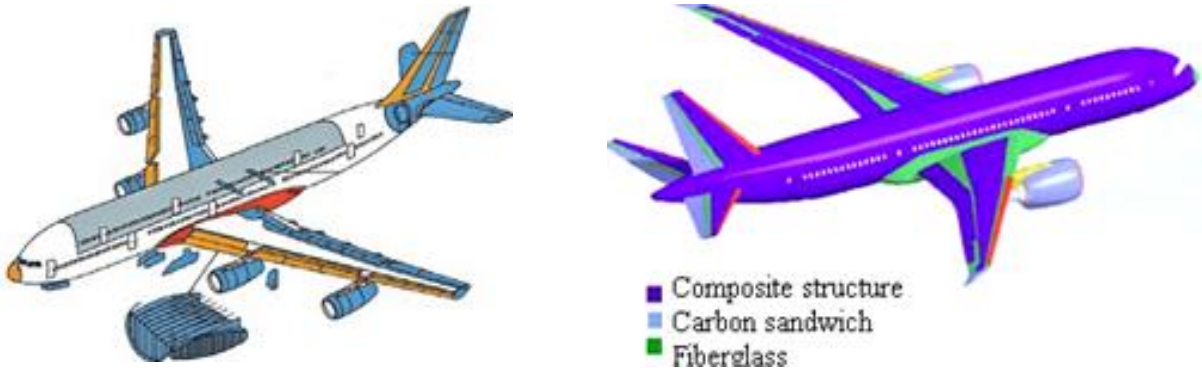


Рис. 7. Використання композиційних матеріалів на літаках А-380 та Боїнг-787

Висновки

Для розрахунку були використані програми, які працюють за методом чисельного математичного моделювання, в яких реалізований метод скінчених різниць та інтегральний метод в’язко-нев’язкої взаємодії. Розглядається потік в’язкої нестискаємої рідини при великих числах Рейнольд-

са (Re > 1 млн.), виражений в осереднених за часом рівняннях Нав'є-Стокса для стискаємого турбулентного потоку. Ефективною моделлю, що описує обтікання профілю при великих числах Рейнольдса, є модель приграничного шару, запропонована Прандтлем [3].

Таким чином, вплив відхилень геометрії профілів крила, пов'язаний з недостатньою точністю виготовлення, значно знижує аеродинамічні показники (підйомну силу, опір, крутний момент та ін.), збільшення аеродинамічного опору спричиняє утворення стрибків ущільнення та несприятливого розподілу тиску за профілем, а різна підйомна сила та крутний момент на правій і лівій консолях може спричинити аварійні ситуації та вимагає компенсації цієї різниці органами керування.

Запропоновані загальні рекомендації з проектування надкритичних профілювань дозволяють забезпечити розробку профілювання крила літака з заданими характеристиками з урахуванням технологічних можливостей виробництва та використанням новітніх технологій і матеріалів.

Список використаної літератури

1. *Бюшгенс Г. С., Свищев Г. П.* Аэродинамика и динамика полета магистральных самолетов – М: «Машиностроение», 1982. – 772 с.
2. *Карась О. В., Ковалев В. Е* Применение обратного метода расчета трехмерного пограничного слоя к задачам обтекания крыла с учетом влияния в'язкості // Ученые записки ЦАГИ. – 1989. – 47 с.
3. *Юдин Г. А.* Основные особенности аэродинамики пассажирских самолетов конструкции Ил – М: «Наука», 1976. – 428 с.
4. http://www.airbus.com/
5. http://www.boeing.com

УДК 621.7.022.6

О. В. Малюкін, В. В. Піддубний, В. О. Піддубний

ПРИСТОЇ ПІДВИЩЕННЯ ЕКОНОМІЧНОСТІ ДВИГУНІВ ВНУТРІШНЬОГО ЗГОРАННЯ НАДЛЕГКИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Вступ

Для вирішення народногосподарських проблем, транспортування невеликих за розміром та вагою вантажів, індивідуального перевезення пасажирів все частіше використовуються надлегкі літальні апарати (НЛА) зарубіжного чи вітчизняного виробництва. Найчастіше вони обладнуються малопотужними авіаційними таких відомих фірм, як BMW, Subaru, Rotax [1, 2] або автомобільними двигунами VW, Subaru, ВАЗ та МеМЗ та мінімальним комплектом контрольно-вимірювальних пристроїв. Економічність таких двигунів достатньо низька. Підвищити її можна шляхом добавлення води до паливної суміші.

Існує три способи добавлення води до паливної суміші. Це – створення водопаливної емульсії [3], електроліз води [4] та безпосередня подача води в циліндри двигуна внутрішнього згорання (ДВЗ) [5-7].

Створення водопаливної (попередньо приготовленої емульсії чи емульгування палива безпосередньо перед використання робочої суміші на самому ДВЗ) підвищує детонаційну стійкість та октанове число палива. Це дозволяє збільшити ступінь стиску і, відповідно, підвищити потужність та економічність двигуна, зменшити вміст шкідливих речовин в відпрацьованих газах. Однак використання водопаливної емульсії проблематично із-за її поганої часової стійкості чи значного ускладнення паливної апаратури ДВЗ. Тому використання водопаливної емульсії залишається проблематичним і використовується лише в лабораторних зразках паливних систем.

Використання продуктів електролізу води до останнього часу мало більше теоретичний, чим практичний інтерес, що пов’язано з великими енергетичними затратами при електролізі. Однак з відкриттям резонансного розкладу води в чарунку Мейєра, який дозволяє при відносно малих струмах отримати в достатній для практичного використання кількості воднево-кисневу суміш (газ Брауна), розробка практичних конструкцій систем живлення ведеться достатньо інтенсивно [3].

Реалізація подачі води в циліндри двигуна з технічної точки зору найбільш проста. Подача води може здійснюватися безпосередньо в циліндри або в впускний колектор двигуна. Перший варіант вимагає використання форсунок розміщених безпосередньо в камерах згорання та паливних насосів високого тиску, тобто вимагає доопрацювання ДВЗ та зміни

його конструкції. Другий – реалізується технічно просто і не потребує складних переробок штатної системи живлення [5, 6]. Недоліком відомих конструкцій є утворення достатньо крупних крапель води при її розпиленні, що знижує ефективність добавки води до паливної суміші.

Постановка задачі

Метою даної роботи є розробка достатньо простих та дешевих пристроїв мілкодисперсного розпилення води в впускному колекторі ДВЗ, що забезпечує високу ефективність згорання палива.

Механізми дії води на процеси сумішоутворення

Механізми дії води на процеси сумішоутворення та робочий стан двигуна пов'язані в першу чергу з охолодженням робочої суміші та деталей поршневої групи, яке виникає із-за різної теплоти випаровування води та палива (вода – 530 ккал/кг, бензин – 75...80 ккал/кг). Вода, попадаючи в вхідний колектор та змішуючись з повітрям, створює водоемульсійну суміш. Суміш, потрапляючи в колектор, охолоджує повітря і збільшує його густину. Це призводить до підвищення коефіцієнту заповнення циліндрів і, відповідно, до підвищення потужності. Отримана суміш відбирає тепло від клапанів, поверхні поршнів, головки та циліндрів. Таким чином відбувається ефективне безпосереднє охолодження та змащення водою розпечених поверхонь циліндра та поршня, які інтенсивно труться одна з одною. Вода, потрапляючи в колектор, перетворюється в мілкодисперсне середовище з розміром капель біля 0,05 мм, причому чим краплі менші, тим краще заповнюється камера згорання. Мінімального розміру крапель (менше 10 мкм) можна досягти використовуючи ультразвукові методи розпилення. Паливо, яке знаходиться також в мілкодисперсному стані, зразу ж обволікає краплі води створюючи шароподібну структуру, в центрі якої вода, а на поверхні паливо. Під дією високої температури, яка досягає в камері згоряння більше 800...1000 C^o, вода перетворюється в пар, збільшуючи свій об'єм більш ніж в 1700 раз. Тиск пару допомагає робочим газам рухати поршні даючи значний приріст потужності та коефіцієнта корисної дії.

Під дією високої температури (вище 800...1000 C^o), яка утворюється при згорянні палива

$$C_mH_n + (m+0{,}5n)O_2 = mCO_2 + nH_2O + T^o,$$

відбувається як взаємодія залишків палива з водяною парою, при якій виділяється водень

$$C + 2H_2O = CO_2 + 2H_2,$$

так і безпосередня взаємодія вуглеводного палива з парою

$$C_mH_n + mH_2O + T^o = mCO + (m + 0{,}5\ n)H_2.$$

Водень, який виділяється при реакції, спалюється, як паливо. В результаті різниці температури кипіння води та палива при нагріванні внутрішня частина краплі – вода – перетворюється в пару, в той час оболонка краплі, яка складається з палива, залишається рідиною. Це призводить до вибуху краплі, тобто до додаткового розпилювання палива за допомогою мікровибуху, що сприяє більш повному згорянню та поліпшенню економічних показників ДВЗ. Присутність води в місці мікровибуху за рахунок активного відбору енергії стримує розвиток детонації. Це дозволяє використовувати паливо з низьким октановим числом без збільшення його витрат, а також нітрометан та закис азоту.

В реальному процесі не весь водень згоряє. Його частина взаємодіє з нагаром (вуглецем), очищаючи поверхню поршневої групи. Нагар, який утворюється, пухкий та розсипчастий.

Незначна частина води переходить в пару вже після її виходу з циліндра взаємодіючи з гарячими газами в вихлопній трубі. Це призводить до зниження температури та шуму вихлопних газів.

Схемно-конструкторські особливості пристроїв

Авторами пропонується наступні конструкції пристроїв підвищення економії палива: механічний та електронний для карбюраторного та інжекторного ДВЗ.

Механічний пристрій економії палива розроблений, виготовлений та перевірений одним із авторів ще 80-х роках минулого століття. Він складається з насоса для води, поплавкової камери з запорною голкою, регулюємого голкового дозатора та системи вводу води (розпилювач) в карбюратор. Конструктивно пристрій нагадує двокамерний карбюратор з двома поплавковими камерами. Принцип роботи – аналогічний роботі карбюратора. Для правильної роботи пристрою необхідно збіднити паливом робочу суміш, відрегулювавши відповідним чином карбюратор та встановити дозатором, що регулює витрату води в пропорції від 0 до 40 % води в робочій суміші. При цьому змінюється кут випередження запалювання від 16^0 до верхньої мертвої точки при роботі на чистому паливі до $25...30^0$ до верхньої мертвої точки при роботі на суміші 60 % палива 40% води. Випробування системи на двигуні МеМЗ 966 протягом чотирьох років показали її ефективність як для зниження перегріву двигуна, зменшення детонацій так і для економії палива, яка складала до 20 %.

Електронний має два варіанта: з дозуючим насосом та електричним клапаном, які розроблені як для карбюраторних так і інжекторних двигунів. Принцип дії першого побудований на дозованій подачі води насосом. Він був розроблений, виготовлений та перевірений в 2008 році на двигуні МеМЗ 265 об’ємом 1,1 літра. Пристрій складається з баку для зберігання

води, ультразвукового розпилювача, дозуючого насоса, керованого з блоку управління, на який подаються сигнали про швидкість обертання колінчастого валу з штатного датчика Холла системи запалювання та системи холостого ходу, системи дистанційного керування випередженням запалення, керуючі органи якої розміщені в зручному для оперативного регулювання місці.

Пристрій працює наступним чином. На режимі холостого ходу пристрій подачі води вимкнений. При переході з холостого ходу в робочий режим вмикається дозуючий водяний насос перистальтичного типу, продуктивність якого пропорційна частоті обертання колінчатого валу. Вода з виходу насоса подається на ультразвуковий розпилювач, розміщений в вхідному колекторі двигуна. В карбюраторному двигуні в якості розпилювача використовується пристрій ультразвукового розпилення палива „Торнадо-М" ГКУИ 45 11 15.001 ТО [7] з титановим вібруючим з ультразвуковою частотою (40...70 кГц) кільцем розміщеним в впускному колекторі під карбюратором. В інжекторному двигуні використовується ультразвукова форсунка проточного типу з фланцевим кріпленням. Необхідний для нормальної роботи кут випередження запалення встановлюється системою дистанційного керування и може регулюватися в межах ± 10 градусів відносно оптимального при роботі без подачі води. Система має пристрої контролю ввімкнення системи подачі води, роботи дозуючого насосу та ультразвукового розпилювача, наявності води в системі та рівня води в баку для її зберігання, індикатори яких виведені на передню панель системи дистанційного керування. Штатне контрольно-вимірювальне обладнання та система керування подачею палива та води об'єднуються в єдину систему за допомогою прокладених комунікаційних джгутів та захисних пристроїв, які розроблюються та виготовляються індивідуально для кожного транспортного засобу.

Пристрій з електронним клапаном використовує автоматичну систему підтримки тиску води (водонапірну станцію) зібрану зі штатних запчастин омивача скла легкового автомобіля ВАЗ 2105, клапан подачі води, в якості якого використовується інжектор системи подачі палива, схему керування режимами роботи водонапірної станції, схему регулювання подачі (в залежності від частоти обертання колінчастого валу ДВЗ) та пристрій контролю кількості води, що подається в колектор. Як розпилювач води може використовуватися пристрій „Торнадо-М" для карбюраторних та ультразвукова форсунка для інжекторних двигунів. Автоматична система підтримки тиску води та клапан подачі води розміщені в безпосередній близькості до впускного колектора. Схеми керування режимами роботи водонапірної станції та регулювання подачі води для зручності оперативного контролю та керування знаходяться біля органів управління транспортного засобу. Вони з'єднанні між собою джгутами проводів.

Основні технічні характеристики електронних пристроїв наведені в таблиці.

Таблиця

Технічні характеристики електронних пристроїв подачі води

Параметри	Тип установки	
	З дозуючим насосом	З електроклапаном
Напруга живлення, В	11,0...14,8	
Струм споживання, А	до 3,0	до 4,0
Тип розпилювача	„Торнадо-М”	Ультразвукова форсунка
Робоча частота розпилювача, кГц	40...70	близько 50
Кількість розпилюємої води, л/год	0...2,5	
Діапазон обертів колінчастого валу, об/хв	0...6000	
Місце знімання вхідного сигналу	З датчика Холла	Вхідні сигнали комутатора
Насос	Перистальтичного типу	Відцентровий
Тиск води в системі, кПа	Відсутній (дозована порція води подається в колектор)	15...20 (порція води визначається часом відкриття клапану)
Контролюємі параметри	1. Витрата води 2. Ввімкнення пристрою „Торнадо-М” 3. Ввімкнення системи подачі води 4. Ввімкнення дозуючого насосу 5. Наявність та рівень води в баку	1. Витрата води. 2. Ввімкнення УЗ форсунки 3. Напруга живлення та струм клапана 4. Ввімкнення водонапірної станції 5. Відсутність води в баку 6. Ввімкнення режиму скидання тиску води
Регулюємі параметри	1. Витрата води	1. Витрата води 2. Верхня та нижня межа тиску води водонапірної станції

Результати експерименту

Експериментальні дослідження проводилися на карбюраторних двигунах типу МеМЗ 966 об’ємом 0,9 літра, МеМЗ 265 об’ємом 1,1 літра та

інжекторного 1,5 SONC об'ємом 1,5 літра. Вони виявили, що двигун працює стабільно при співвідношенні вода/палива, як 1/3 (оптимальне 1/5...1/6). Виявлене відчутне підвищення крутячого моменту в усьому діапазоні обертів двигуна. Відсутня детонація навіть при ранніх кутах запалювання. Відсутній нагар на свічках та елементах випускної системи.

Висновки

Таким чином, розроблено три конструкції пристроїв подачі води в впускний колектор ДВЗ, які дозволяють збільшити на 30 % момент на валу двигуна; зменшити витрати палива більш ніж на 20%; більш ефективно охолоджувати двигун в літній період; знизити шумність роботи ДВЗ та ударні навантаження на кривошипно-шатунний механізм; значно зменшити кількість нагару на поршнях, клапанах та свічках; зменшити викид СО в повітря; використовувати бензин з меншим октановим числом чим рекомендовано заводом виробником ДВЗ.

Подібні пристрої можуть встановлюватися на двигуни внутрішнього згорання надлегких літальних апаратів, наприклад, на двигуни мотодельтапланів "Aeros-2" та "Cross Country", літаків "Sky Ranger" виробництва ТОВ „Аерос" (м. Київ, Україна), або на будь-який інший двигун, в тому числі автомобільний.

Список використаної літератури

1. Гришаев В. Присмотримся к нашим моторам / В. Гришаев // Авиация общего назначения. – 2007. - №6. – С. 23-27.
2. Каторгина С. Характеристики двигателей Rotax / С. Каторгина // Авиация общего назначения. – 2007. - №5. – С. 20-22.
3. Опис та інструкція по виготовленню та експлуатації приладу „Water4Gas" (Водяний паливний чарунок). ***www.Water4Gas.com***
4. Ерохов В.И. Экономичная эксплуатация автомобиля / В.И Ерохов. – М.: ДОСААФ, 1986. – 128 с.
5. Бутыленко А. Ю., Джой Ф.Е., Бутыленко С.А. и др. Устройство для подачи воды в двигатель внутреннего сгорания. Патент РФ. № 2015397 от 30.06.1994.
6. Опис та інструкція по експлуатації приладу „Водокар" (Пристрій економії томлива та збільшення потужності двигуна). ***www.Vodocar.com.ua***
7. Малюкін О. В. Підвищення економічності двигунів для надлегких літальних апаратів / О.В. Малюкін, В.В. Піддубний, В.О. Піддубний // 7 Міжнар. наук.-техн. конф. "Гіротехнології, навігація, керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки" Зб. доповідей. Частина II / К.: НТУУ „КПІ" 2009. - С. 58-62.

8. Опис та інструкція по експлуатації приладу „Торнадо-М”. ГКУИ 45 11 15.001 ТО.

УДК: 519.6

В. В. Сухов, Ю. І. Бондар

ТЕХНОЛОГІЇ РОЗРАХУНКІВ ЗОВНІШНІХ НАВАНТАЖЕНЬ НА НЕСУЧІ ПОВЕРХНІ ЛІТАКА

Вступ

Проблеми розвитку технології розрахунків зовнішніх навантажень на крило сучасного літака є складовою частиною проблеми сучасного літакобудування.

Справа в тому, що вартість проектування сучасного літака та проблеми його будівництва настільки великі, що не можуть йти ні в яке порівняння з вартістю технологій 70 – 80 річної давнини. Сучасне проектування літаків вимагає величезних людських та матеріальних ресурсів.

Вирішення проблеми проектування ґрунтується на розумінні природи самої проблеми та на досконалому формуванні критеріїв її вирішення [1].

Проблема керування проектними даними є найбільш актуальною проблемою, яка пов’язана з використанням систем документообігу. При цьому означена проблема є найменш розробленою. Не дивлячись на широке використання різноманітних автоматизованих систем керування проектними даними, на сьогодні нема єдиної системи, яка б дозволила повністю вимкнути з процесу проектування "паперові" технології.

Постановка задачі

Одна з головних причин окресленого положення полягає в тому, що технологія керування проектними даними відрізняється від традиційних технологій керування, на яких формуються та експлуатуються більшість електронних баз даних (БД).

Це пов’язане з тим, що для систем керування проектними даними неможливо заздалегідь окреслити логічну структуру даних або алгоритм її формування тому, що побудова структури даних проекту сама по собі є проектуванням. Таким чином, одна з головних проблем автоматизації проектування є слабка розробка технологій проектування.

Загальний аналіз міцності конструкцій складних технічних об'єктів (ТО) в даний час проводиться за допомогою спеціалізованих програмних комплексів. На відміну від систем автоматизованого проектування, у складі сучасних комплексів нема PDM–систем, тому зовнішній та внутрішній обмін даними в рамках цих комплексів відбувається шляхом прямого звернення до файлів, що створює певні проблеми при отриманні даних від інших програмних комплексів.

Одна з таких проблем – моделювання дії на конструкцію об'єкту зовнішніх аеродинамічних навантажень [2]. Моделювання може бути здійснене на базі експериментальних досліджень (ЕД) або за допомогою чисельних методів (ЧМ).

Один з головних аспектів цієї проблеми – невідповідність форматів даних різнорідних програм у випадку, коли визначення навантажень проводиться за допомогою програмного забезпечення (ПЗ), яке не входить до складу розрахункових комплексів.

В теперішній час проводяться намагання вирішити цю проблему шляхом об'єднання в рамках одного комплексу функцій експериментального моделювання та функцій чисельного визначення аеродинамічних навантажень. Але життя підказує, що обчислити чисельними методами аеродинамічні навантаження у всіх випадках експлуатації об'єкту неможливо з причини конфліктності всіх існуючих аеродинамічних теорій з реальною дійсністю. Особливо це стосується випадків відриву пограничного шару від омиваємої поверхні.

Так, наприклад, до недавнього часу у номенклатуру поставки комплексу NASTRAN входив спеціальний модуль CFDesign, який забезпечує моделювання поля зовнішніх аеродинамічних навантажень. Однак такий метод лише частково вирішує проблему обчислення навантажень, потрібних для аналізу пружно–деформованого стану конструкції складного технічного об'єкту (ТО). Це пов'язано з тим, що точне визначення величин аеродинамічних навантажень, діючих на зовнішню поверхню ТО, являє собою складну та багатогранну проблему, вирішення якої виходить далеко за рамки чисельного моделювання та потребує залучення спеціалістів, які володіють досвідом вирішення відповідних задач.

Зміст роботи

В сучасних проектних організаціях, які займаються розробкою конструкцій складних ТО, питання визначення величини аеродинамічних навантажень вирішуються в рамках спеціалізованих інформаційних систем. При цьому частіше за все використовують програмне забезпечення, яке не входить у склад існуючих комплексів та не забезпечує прямого обміну даними [3].

Одним з найбільш характерних ознак процесу проектування є циклічність. Інакше кажучи, проектна задача так або інакше вирішується із застосуванням ітераційних методів. Присутність циклічності обумовлено рядом чинників, головним з яких є постійна корекція моделей, при цьому ця корекція проводиться як під час внутрішньомодельного циклу, так і при циклічній взаємодії моделей та групи моделей.

Скорочення часу, витраченого на один крок циклу, є важливим фактором оптимальності процесу проектування.

Термін одного кроку внутрішньомодельного циклу в основному залежить від двох факторів: часу, витраченого на завдання (коректування) початкових даних (розробку моделі), та часу, витраченого на аналіз результатів розрахунків та експериментальних випробувань (ЕВ).

Величини вказаних факторів визначаються степенем розвитку інженерних технологій (ІТ) в частині наявності необхідного ПЗ.

Враховуючи всі згадані чинники, стосовно моделювання дії на конструкцію ТО зовнішніх аеродинамічних навантажень, можливо зробити висновки:

– отримати коректні дані для проведення проектування можливо в тісному поєднанні ЕД та ЧМ, які взаємно доповнюють одне одного у спільному інформаційному середовищі (ІС) [4] .

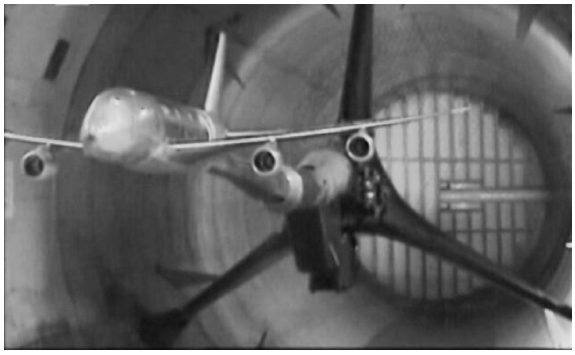


Рис. 1. Аеродинамічна труба та стенд

Скорочення циклу проектування можливе за рахунок розвитку ЧМ та відповідного ПЗ, що може дозволити скорочення кількості ЕД.

Головною рисою розвитку ІТ є вирішення задач у режимі реального часу обробки результатів ЕД. Для проведення ЕВ використовуються аеродинамічні труби (АДТ) та стенди (рис.1) .

Особлива роль відводиться розвитку комплексів наземних випробувань з використанням сучасних ІТ. Задача поліпшення ЧМ дослідження літака є задачею побудови ІТ як нових засобів обробки даних, об’єднаних у технологічну систему процесів (збору, передачі, обробки, зберігання, подання інформації) та керування [5].

Такий комплекс являє собою розподілену систему обробки даних з власним розрахунковим середовищем та зі своєю концептуальною схемою, які визначають процедури підтримки відповідних процесів та ресурсів.

Крім того, він окреслює інформаційне та програмне середовище та їх взаємодію.

Прикладне ПЗ має: призначення, вхідні та вихідні дані, інформацію для керування, ідентифікатори процедур, і т. і. Воно надає конструктору конкретний метод та алгоритм дій для виконання необхідних розрахунків.

Алгоритм отримання розподілених навантажень по поверхні моделі літака починається з розрахунків тиску за відповідними характеристиками датчиків.

В системі реалізовано наступний алгоритм розв'язання задач проведення ЄД (рис. 2),

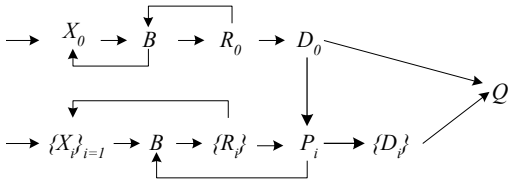


рис. 2. Алгоритм задач

де $X_i \overset{k}{_{i=0}}$ – підготовка початкових даних та завдань на дослідження;

$D_i \overset{k}{_{i=0}}$ – початкові дані та дані дослідження;

$R_i \overset{k}{_{i=0}}$ – критерій прийняття рішення;

B – візуалізація даних;

P – формування малюнків;

Q– документування.

Існуючі способи виміру розподіленого тиску передбачають використання пневмокомутатора (ПК) та приймача тиску (ПТ) (рис. 3).

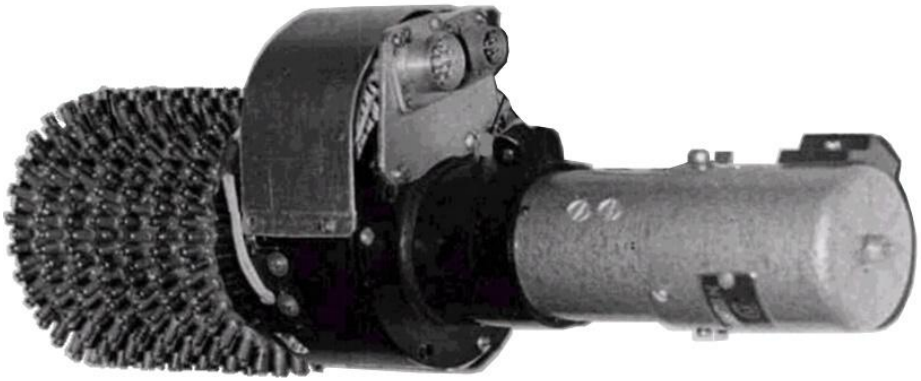


Рис. 3. Пневмокомутатор

Ефект використання ПК досягається за рахунок автоматичного підключення дренованих отворів (точок) до ПТ, регістратора даних (РД) зі швидкістю дії ПК, керованого від комп'ютера.

Основними елементами ПК є циліндричний статор, ротор, блок ПТ, електропривод, фотоелектричний датчик номеру вимірюваної точки та синхроімпульсів, корпус редуктор. Статор та ротор ПК утворюють комута-

ційний вузол, який сумісно з електроприводом забезпечує підключення дренажних точок до ПТ [6].

На рис. 4 зображено приклад дренованої моделі літального апарату (МЛА) на 674 точки на крилі, пілонах та мотогондолах, 317 точок на фюзеляжі, 147 точок на хвостовому опереннні. Виконуючий механізм послідовно виконує підключення дренажних точок МЛА до ПТ, який вимірює значення тиску та перетворює його в напругу v_i (вихідного сигналу). Система дозволяє вимірювати тиск в діапазоні $0 \div \pm 6 \cdot 10^4$ Па.

Загальний алгоритм роботи такої системи складається з наступних кроків:

Крок 1. Перевірка технічних засобів.

Крок 2. Вирішення задачі адаптивного керування ПК з метою визначення попередніх параметрів керування ПК.

Крок 3. Запуск ПК та вибір необхідного плану експерименту (ПЕ).

Крок 4. Установка заданих у ПЕ кутів (α_{fix}, β_{fix}) та перевірка значень показників в контрольних каналах системи.

Крок 5. Визначення параметрів керування ПК та його пуск по досягненні потрібної швидкості потоку у робочій частині АДТ.

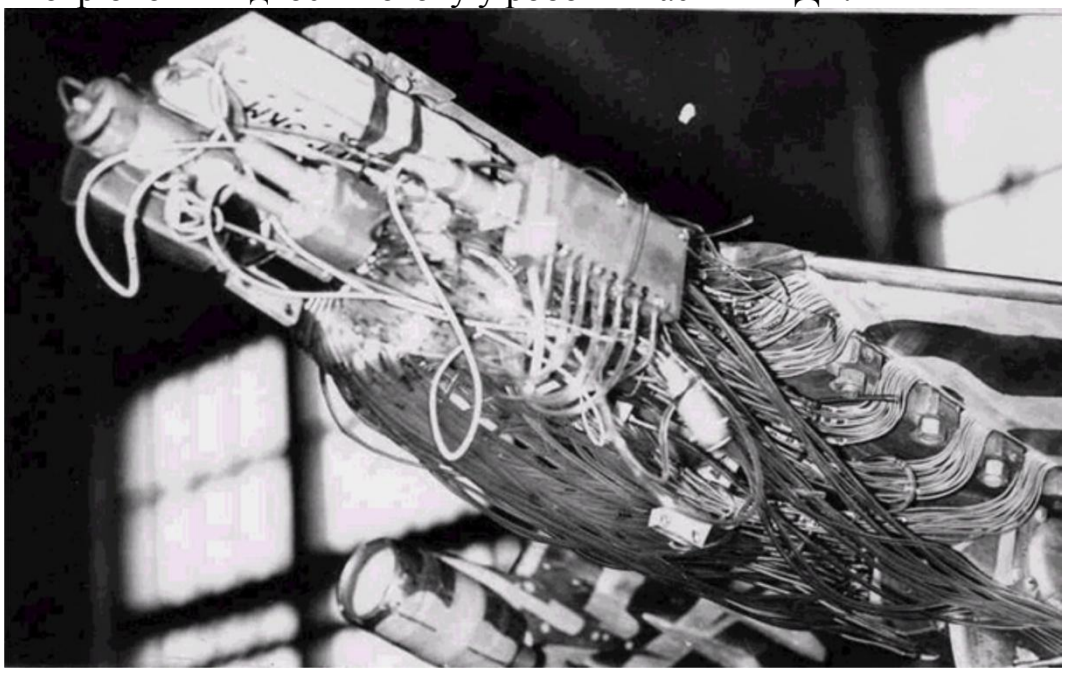


Рис. 4. Дренована модель літака

Крок 6. Збір ЕД у вигляді значення відносного тиску дренажних точок, первинна їх обробка та аналіз стану технічних засобів випробувального стенду (ВП). Запис коректних даних у БД.

Крок 7. Вторинна обробка даних експерименту – визначення розподілених та сумарних аеродинамічних характеристик, аналіз та документування ЕД. У випадку виявлення недостовірності ЕД або зміни плану експериментів – перехід на крок 3.

Крок 8. Кінець.

Вихід з середовища ПЗ керування ЕВ на верхній рівень ПЗ. До первинної стадії обробки ЕД відноситься:

1. Розміщення у БД кількості та типу ПК, таблиць відповідності, координат дренажних точок та дренажних перерізів, умови проведення експерименту – номер досліду, значення кутів α и β та інше.
2. Визначення тиску у точках по відповідним даним ПТ. Обчислення відносного тиску у точках, виконання сортування значень тиску за відповідними перерізами, документація ЕД.

Суттєвим питанням викладеного методу є наявність коректних ЕД, які забезпечуються алгоритмами оперативного контролю функціонування випробувального стенду (ВС). Реєстрація ЕД виконується при коректній роботі технічних засобів системи. Запис ЕД в БД системи виконується після визначення $\overline{P}$ в контрольних точках та перевірки їх коректності. У випадку їх некоректності дослідження повторюється.

До вторинної стадії обробки відносяться визначення аеродинамічних коефіцієнтів (АДК) за відомими значенням $\overline{P}_i$, а саме, значенням коефіцієнтів нормальної та тангенціальної складових аеродинамічної сили, віднос

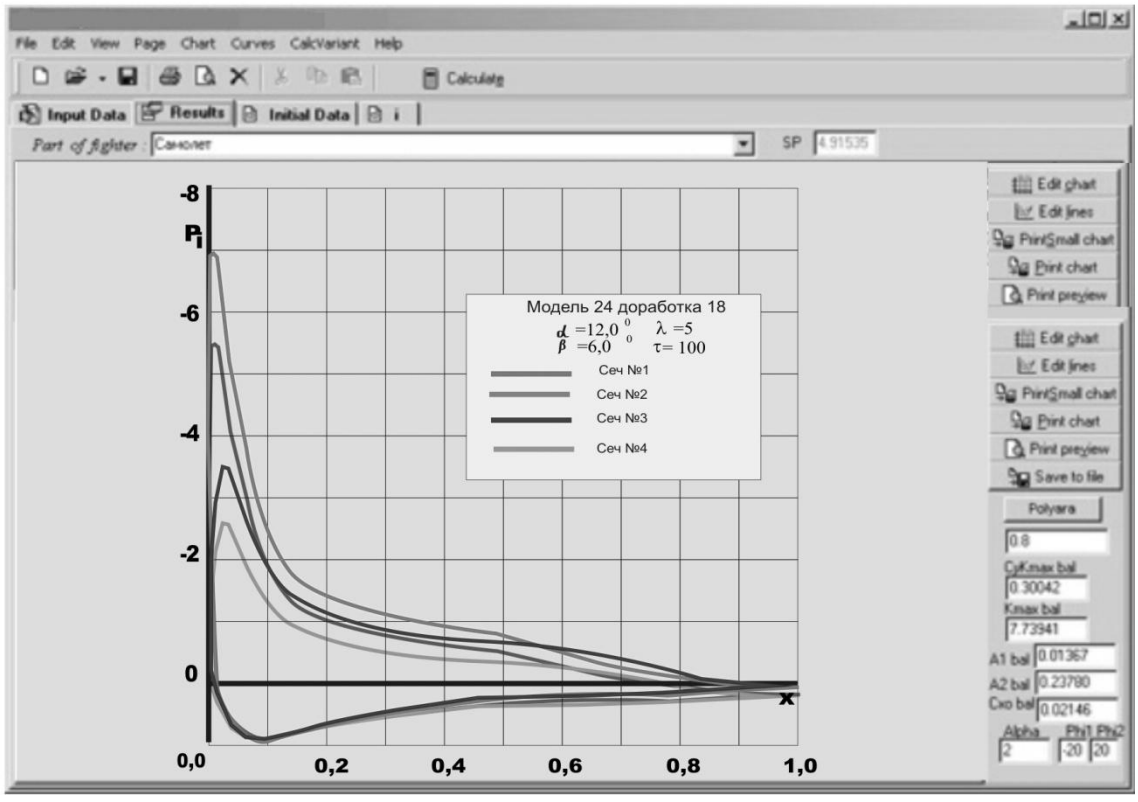


Рис. **5. Типове розподілення** тиску по хорді моделі

не положення центру тиску. Типове розподілення тиску по хорді моделі візуалізується на моніторі та забезпечує контроль за перебігом експерименту (рис. 5). Обчислення проводяться по всіх дренованих елементах моделі та інтегруються для отримання сумарних АДК для моделі в цілому.

На рис. 6 зображено типовий приклад візуалізації розподілу відносного тиску у чотирьох перерізах моделі літального апарату (МЛА). Система реалізує вищезгадані методи та дозволяє графічно відтворити епюри розподілу тиску $\overline{P} = f(\overline{x})$ по поверхні елементів МЛА.

Також визначаються сумарні аеродинамічні характеристики МЛА в цілому (рис. 7).

ПЗ функціонує під керівництвом ОС Windows, та виконано за модульним принципом. Мови програмування – Fortran, C, Pascal и Assemler.

Функціональні можливості ПЗ наступні: підготовка даних, настройка та перевірка технічних засобів, керування ЕД та контроль за станом системи, збір, та корекція даних, вторинна обробка, зберігання результатів та документування (таблиці, графіки).

Структура бази даних створена на співвідношенні наборів даних. Кожний набір даних виглядає як файл з фіксованою структурою. Набір таких файлів у БД системи дозволяє ефективно організувати керування ЕД. Алгоритм взаємодії з вимірювальною апаратурою наступний:

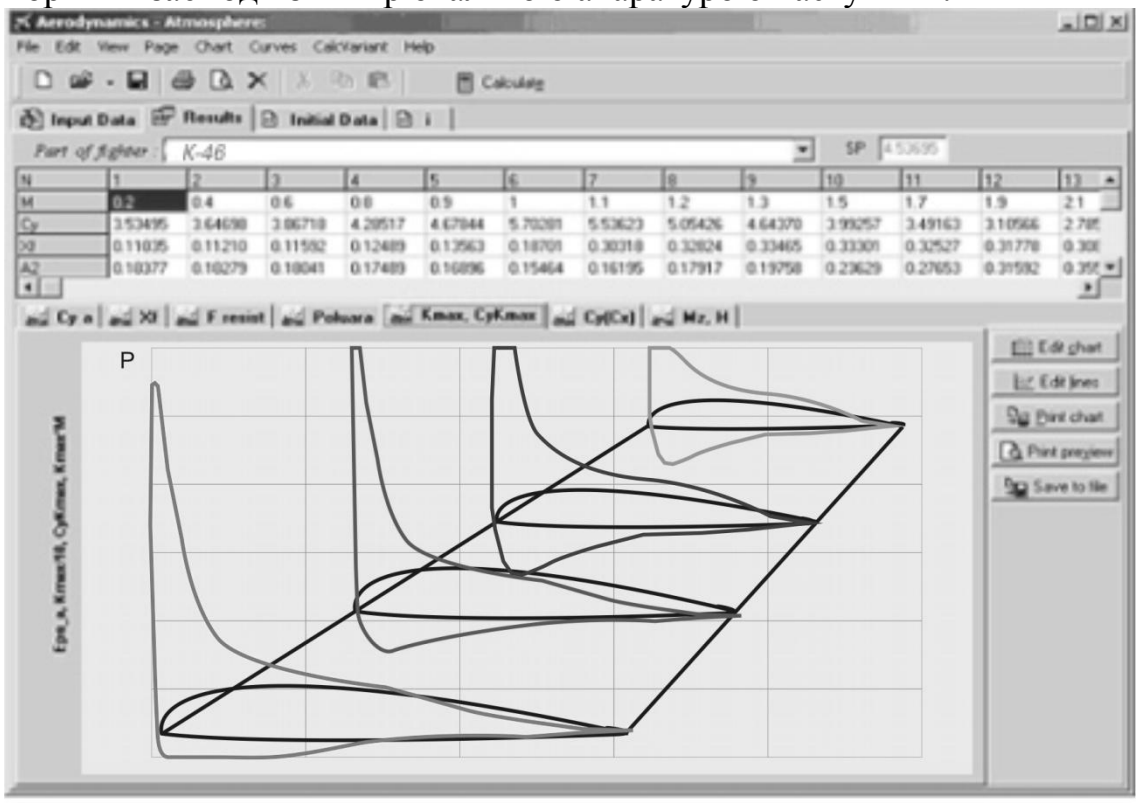


Рис. 6. Розподіл відносного тиску

Крок 1. Установка ПК в початкове положення та збір «нульових» показників ПТ.

Крок 2. **По команді «пуск»** надходить код запуску ПК.

Крок 3. По надходженню сигналу синхронізації від ПК виконується регістрація ЕД.

Крок 4. По надходженню сигналу «кінець циклу» подається команда зупинки двигуна ПК.

Крок 5. Кінець.

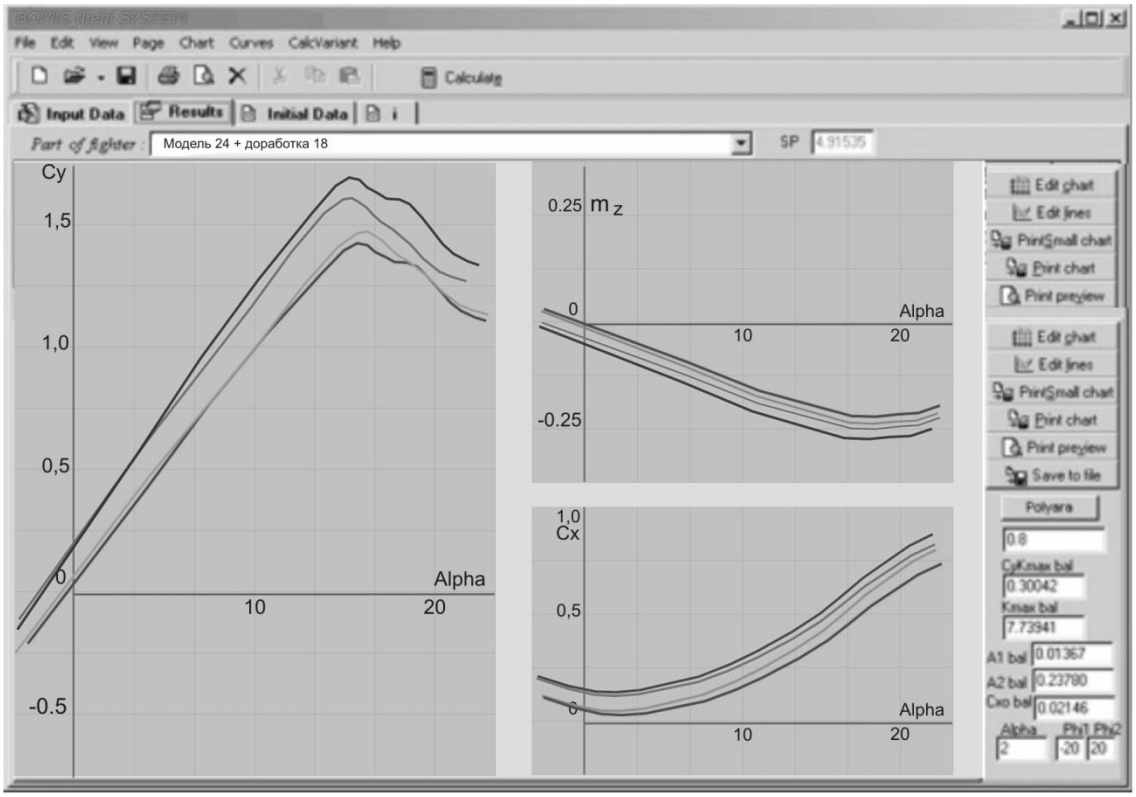


Рис. 7. Сумарні аеродинамічні характеристики МЛА

Висновки

Реалізовано алгоритм експериментального моделювання зовнішнього аеродинамічного навантаження МЛА, де початковими даними є аеродинамічні характеристики МЛА. Обчислюються аеродинамічні характеристики загальної компоновки. Характеристики апроксимуються аналітичними або сплайн функціями та перераховуються за необхідними параметрами. Визначаються аеродинамічні функції МЛА та проводиться документація. Отримані результати зберігаються у електронній БД в якій стандартизовані формати вхідної та вихідної інформації.

Список використаної літератури

1. *Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмэн Р. Л.* Аэроупругость. – М.: Иностранная литература, 1958. – 620 с.

2. *Бондарь Ю. И., Евдокимов С. А.* Расчет интенсивности вихревой системы самолета. – Краснодарський ГОСНИИ ГА, 1986. – 12 с.
3. *Бондарь Ю. И., Демчук С. П., Никитин В. М.* Создание методики и программного обеспечения проведения дренажного эксперимента с обработкой результатов в режиме реального времени. – К.: АНТК им. О.К. Антонова, 1988. – 40 с.
4. *Бондарь Ю. И., Демчук С. П., Никитин В.М.*Создание методики и программного обеспечения для обработки данных нагруженности крыла при проведении летного эксперимента. – К.: АНТК им. О.К. Антонова, 1989. – 40 с.
5. *Зинченко В. П., Муха И. П.* Информационная технология дренажных испытаний моделей летательных аппаратов // УСиМ, 2002. – № 5. С13–18.
6. *Зінченко В. П., Гуржий А. М.* Апаратно–програмні комплекси для дослідженння характеристик літаків // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2004. – № 3. – С. 43 – 55

УДК 53.088:62 – 754.2 (045)

В. О. Апостолюк, І. В. Горбунович **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ КОРІОЛІСОВИХ ВІБРАЦІЙНИХ ГІРОСКОПІВ**

Нові математичні моделі, як точні, так і наближені, для таких параметрів траєкторії сталого руху чутливих елементів коріолісових вібраційних гіроскопів, як на пів вісі і кут обертання еліпса, отримані в залежності від конструктивних параметрів та переносної кутової швидкості. Точність отриманих моделей продемонстровано через порівняння із результатами реалістичного чисельного моделювання.

***Ключові слова*:** коріолісовий вібраційний гіроскоп, траєкторія руху.

УДК 586.383

О. В. Збруцький, С. П. Маляров, Т. В. Стеценко **СИНТЕЗ БАГАТОМІРНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ З СИМЕТРІЄЮ**

Запропонована методика зведення двомірної гіроскопічної системи керування з симетрією та взаємозв'язаними каналами до одномірної з комплексною змінною. Розроблений алгоритм оптимального синтезу такої системи керування на основі методів синтезу одномірних систем. Показаний підхід та синтезована структура алгоритму оптимального керування, який дозволяє забезпечити необхідну точність системи при довільних зовнішніх збуреннях.

***Ключові слова*:** система керування та стабілізації, взаємозв'язок каналів, динамічна симетрія, оптимальний алгоритм керування.

УДК: 681.3+615.89

О. М. Мелащенко, Л. М. Рижков, Фам Ба Кхань **МАГНІТНО-МАХОВИЧНЕ КЕРУВАННЯ МІКРОСУПУТНИКОМ**

Досліджується динаміка мікросупутника при використанні в системі керування мікросупутником двигунів-маховиків та магнітних котушок. Як засіб виключення насичення маховиків розглядається введення інтегральної складової в закон керування котушками. Показана ефективність запропонованого закону керування.

Ключові слова: мікросупутник, двигун-маховик, магнітна котушка, закон керування.

УДК 531.383.25

С. В. Морозов, К. В. Тохтамишева **ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ ПОВІТРЯНОГО СУДНА НА ЕТАПІ ЗАХОДУ НА ПОСАДКУ З ДОВІЛЬНИМ КУТОМ ПІДХОДУ ДО ЗЛІТНО-ПОСАДОЧНОЇ СМУГИ**

В статті відмічені труднощі синтезу системи автоматичного керування заходом на посадку сучасного літака з довільним кутом підходу до злітно-посадочної смуги. Однією з особливостей даного режиму є те, що пілот не завжди може вчасно прийняти рішення про продовження заходу на посадку або вихід на друге коло.

В якості реалізації показана можливість синтезу системи керування польотом літака в боковій площині при заході на посадку з використанням певних графічних залежностей за допомогою комп'ютерної технології «MATLAB».

Ключові слова: літак, посадка, вертикальна швидкість.

УДК 531.768

М. Г. Черняк **ПОХИБКИ НАВІГАЦІЙНОГО МАЯТНИКОВОГО КОМПЕНСАЦІЙНОГО АКСЕЛЕРОМЕТРА ВІД ДІЇ ПРОСТОРОВИХ ЛІНІЙНИХ ТА КУТОВИХ ВІБРАЦІЙ ОСНОВИ**

Розроблено математичну модель методичних вібраційних похибок маятникового компенсаційного акселерометра з пружним підвісом чутливого елементу, які виникають в найбільш загальних умовах просторового коливального руху основи. Отримано аналітичні формули для розрахунку цих похибок, та виконано їх розрахунок для навігаційного акселерометра типу АК-6.

Ключові слова: навігаційний маятниковий компенсаційний акселерометр; вібраційна похибка; пружний підвіс чутливого елемента.

УДК 531.383.05

Т. А. Марченко, В. В. Попов **АВТОМАТИЧНЕ УПРАВЛІННЯ ПРОДОЛЬНИМ РУХОМ ЛІТАКА ПРИ НАБОРІ ВИСОТИ**

В статті розглянуті труднощі виконання вертикального маневру літака, відзначено, що при цьому різко зростає витрата пального. Запропоновано використовувати пілотування літака по системі самого корисного та ощадливого режиму польоту з точки зору збереження пального.

Ключові слова: літак, висота, витрата пального.

УДК 621.317.725

Ю. М. Туз, О. М. Кривченкова, О. В. Синьоока **ПОХИБКИ ТЕРМОКОМПА-РУВАННЯ ЗІ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДІВ АПРОКСИМАЦІЇ**

Наведено дослідження впливу вибору реперних точок та впливу присутності шумової складової вимірювання початкових даних на точність здійснення апроксимації, а також можливе розширення меж екстраполяції. В статті наведено аналітичні вирази залежності похибки знаходження коефіцієнтів апроксимації від похибок знаходження значень вхідної та вихідної величини, а також похибки розв'язку апроксимуючого рівняння в залежності від похибки визначення коефіцієнтів поліноміальної моделі.

***Ключові слова*:** апроксимація, інтерполяція, екстраполяція, по хибка апроксимації.

УДК 519.222

Є. Т. Володарский, Н. О. Рековець **МЕТОДИ ОЦІНКИ ПРИЙНЯТНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИПРОБУВАНЬ ДОРОГИХ УНІКАЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ**

У даній статті запропонований оптимальний метод оцінки результату при проведенні дорогих вимірів. Обґрунтована можливість використання в якості оцінки вихідної величини не тільки середнього значення вибірки й вибіркової медіани, але й медіани по Гаствірту й Ходжесу-Леману, які за певних умов дають більш точні результати, навіть для випадків, коли одне із значень вибірки перебуває поза критичною зоною.

Ключові слова: дорогі виміри, метод оцінки, малі вибірки, медіана по Гаствирту, медіана Ходжесу- Леману.

УДК 004.67: 681.518.5

А. С. Шантир **СУМІЩЕННЯ ВИБІРОК ПЕРІОДИЧНОГО ПРОЦЕСУ ПРИ НЕСИНХРОННИХ ВІДЛІКАХ В ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНІЙ СИСТЕМІ РОТОРНОЇ МАШИНИ**

Розроблено метод вимірювання інтенсивності регулярної складової вібровимірювального сигналу і запропоновано пристрій віброконтролю, який забезпечує захист опорних підшипників роторної машини за двома показниками - СКЗ віброшвидкості і СКЗ прецесії валу, теоретично і експериментально обґрунтовано його ефективність. Встановлено параметри запропонованого пристрою віброконтролю для електромеханічних агрегатів, що працюють на частоті 50±0,5 Hz, виконана оцінка його метрологічних характеристик та знайдена максимальна похибка оцінки показника інтенсивності дії на опорні підшипники прецесії валу ротора.

Ключові слова: вібросигнал, пристрій віброконтролю, контрольно-сигнальна апаратура, інформаційно-вимірювальна система, роторна машина.

УДК 389.317

В. В. Літвіх, С. А. Богомазов, Ю. С. Шумков, А. О. Назаренко **АНАЛІЗ АЛГОРИТМІВ ВИМІРЮВАННЯ ПОХИБКИ РІЗНОПОЛЯРНОСТІ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ НАПРУГИ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНИХ**

Проведено аналіз відомих алгоритмів вимірювання похибки різнополярності перетворювачів напруги термоелектричних. Аналіз довів, що при їх використанні невилучена систематична похибка вимірювання має велике значення. Запропоновано новий алгоритм вимірювання похибки різнополярності перетворювачів напруги термоелектричних. Проведено аналіз невилученої систематичної похибки, що виникає при використанні запропонованого алгоритму. Аналіз довів, що його використання забезпечує суттєво менше значення невилученої систематичної похибки.

***Ключові слова*:** перетворювач напруги термоелектричний, похибка різнополярності.

УДК 303.714

О. М. Сікоза, О. Ю. Редьога, Н. А. Яремчук **АНАЛІЗ ФУНКЦІОНУВАННЯ СИСТЕМИ З ІНДИВІДУАЛЬНОЮ ТРАЄКТОРІЄЮ НАВЧАННЯ**

В статті проведено аналіз функціонування системи з використанням індивідуальної траєкторії навчання, в якій прогнозування оцінок на виході структурних одиниць дидактичного матеріалу проводится за початковими або поточними оцінками в вербальній шкалі і нечітким відношенням «вхід-вихід» або матрицею переходу.

***Ключові слова*:** індивідуальна траєкторія навчання.

УДК 519.23

О. В. Козир **ЕТАПИ ОБРОБКИ ДАНИХ ЗА МАЛИХ ВИБІРОК**

В статті розглянуті основні критерії що рекомендовані ГОСТ Р ІСО 5725 для обробки даних. Досліджено вплив об’єму малих вибірок на результати отримані за допомогою критеріїв Кохрена та Граббса, визначені границі їх застосування. Результати дослідженні зведені в таблицю зручну для використання. Наведений загальний алгоритм обробки даних з рекомендаціями щодо застосування.

Ключові слова: малі вибірки, обробка малих вибірок, викиди, критерій Граббса, критерій Кохрена.

А н о т а ц і ї

УДК 532.517

О. В. Микитченко, О. П. Мариношенко **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИХРОВОГО РУХУ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА**

Вихровий рух суцільного середовища є перспективним напрямком для розвитку різноманітних рушіїв механічних конструкцій, зокрема при розробці нових перспективних типів двигунів. Вивід математичної моделі вихрового руху проводиться на основі законів гідродинаміки.

Актуальність поставленої задачі полягає в тому, що створення вихрового руху в середині двигуна дозволить зменшити витрати енергоносіїв, а в майбутньому перейти на альтернативні види палива.

В статті розглянуті сучасні досягнення в гідродинаміці, та розглянуті підходи до визначення і описання вихрового руху суцільного середовища, в якості якого розглядається ідеальна рідина.

Ключові слова: вихровий рух суцільного середовища.

УДК.539.3

С. І. Трубачев, О. М. Алексейчук **КОЛИВАННЯ СТРИЖНІВ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ**

Робота присвячена вирішенню задачі про коливання стержневих конструкцій змінного перерізу варіаційно-сітковим методом. Отримані вирази для визначення основних власних частот при поздовжніх і згінних коливаннях стрижнів змінного перерізу, досліджено вплив клиноподібності і конусності на значення власних частот.

Ключові слова: коливання, динаміка стержневих конструкцій, власні частоти.

УДК 629.7.02

Д. М. Зінченко, Т. В. Драган **ОЦІНКА ВПЛИВУ ВІДХИЛЕНЬ ПОВЕРХНІ КРИЛА НАДКРИТИЧНОГО ПРОФІЛЮВАННЯ НА АЕРОДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІТАКА**

Стаття присвячена такій проблемі виробництва як відхилення, неточності, невідповідності теоретичної моделі і фактичного зразка, які виникають через неможливість реалізувати деякі конструкторсько-технологічні рішення на практиці.

В роботі використані дані теоретичних і фактичних профілів дослідного зразка літака, по яким побудована розрахункова модель. Результати представлені графічно, проведений аналіз впливу геометричних відхилень на основні аеродинамічні характеристики (коефіцієнт підйомної сили, лобового опору, крутний момент та ін.) і запропоновані загальні рекомендації по аеродинамічному проектуванні крил. Також розглянуто варіант заміни передкрилка кореневим напливом і використання композиційних матеріалів замість традиційних.

Створення крила з необхідними характеристиками починається саме на етапі аеродинамічного проектування. Тому важливо створити теоретичну модель, максимально наближену до фактичної, урахувати похибки, розглянути можливість спрощення і вдосконалення існуючих конструкторсько-технологічних рішень.

Ключові слова: надкритичний профіль, аеродинамічні характеристики.

УДК 621.7.022.6

О. В. Малюкін, В. В. Піддубний, В. О. Піддубний **ПРИСТОЇ ПІДВИЩЕННЯ ЕКОНОМІЧНОСТІ ДВИГУНІВ ВНУТРІШНЬОГО ЗГОРАННЯ НАДЛЕГКИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ**

Розроблені конструкції пристроїв подачі води в камеру згорання двигунів надлегких літальних апаратів, досліджена їх ефективність та характеристики.

УДК: 519.6

В. В. Сухов, Ю. І.Бондар **ПРОБЛЕМИ РОЗВИТКУ ТЕХНОЛОГІЇ РОЗРАХУНКІВ ЗОВНІШНІХ НАВАНТАЖЕНЬ НА НЕСУЧІ ПОВЕРХНІ ЛІТАКА**

В статті розглянуті проблеми розрахунку навантажень на несучі поверхні літального апарату на дозвукових швидкостях польоту.

Показано процес та методики отримання початкових даних для проведення досліджень, структура програмного комплексу.

Ключові слова: навантаження, літак, дослідження.

УДК 53.088:62 – 754.2 (045)

В. А. Апостолюк, И. В. Горбунович **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ КОРИОЛИСОВЫХ ВИБРАЦИОННЫХ ГИРОСКОПОВ**

Новые математические модели, как точные, так и приближенные, для таких параметров траектории установившегося движения чувствительных элементов кориолисовых вибрационных гироскопов, как полуоси и угол поворота эллипса, получены в зависимости от конструктивных параметров и переносной угловой скорости. Точность полученных моделей продемонстрирована путем сравнения с результатами реалистичного численного моделирования.

Ключевые слова: кориолисовый вибрационный гироскоп, траектория движения.

УДК 586.383

А. В. Збруцкий, С. П. Маляров, Т. В. Стеценко **СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С СИММЕТРИЕЙ**

Предложена методика сведения двумерной гироскопической системы управления с симметрией и взаимосвязанными каналами к одномерной с комплексной переменной. Разработан алгоритм оптимального синтеза такой системы управления на основе методов синтеза одномерных систем. Показан подход и синтезирована структура алгоритма оптимального управления, который позволяет обеспечить необходимую точность системы при произвольных возмущениях.

Ключевые слова: система управления и стабилизации, взаимосвязь каналов, динамическая симметрия, оптимальный алгоритм управления.

УДК: 681.3+615.89

О. Н. Мелащенко, Л. М. Рыжков, Фам Ба Кхань **МАГНИТНО-МАХОВИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МИКРОСУПУТНИКОМ**

Исследуется динамика микроспутника при использовании в системе управления микроспутником двигателей-маховиков и магнитных катушек. Как средство исключения насыщения маховиков рассматривается введение интегральной составляющей в закон управления катушками.

Ключевые слова: микроспутник, двигатель-маховик, магнитная катушка, закон управления.

УДК 531.383.25

С. В. Морозов, К. В. Тохтамишева **ФОРМУЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ВОЗДУШНОГО СУДНА НА ЭТАПЕ ЗАХОДА НА ПОСАДКУ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОДХОДОМ К ВЗЛЕТНО-ПОСАДОЧНОЙ ПОЛОСЕ**

В статье отмечены трудности синтеза системы автоматического управления заходом на посадку современного самолета с произвольным углом подхода к взлетно-посадочной полосе. Одной из особенностей данного режима является то, что пилот не всегда может вовремя принять решение о продолжении захода на посадку или уходе на второй круг.

В качестве реализации показана возможность синтеза системы управления полетом самолета в боковой плоскости при заходе на посадку с использованием определенных зависимостей при помощи компьютерной технологии «MATLAB».

Ключевые слова: самолет, посадка, вертикальная скорость.

УДК 531.768

Н. Г. Черняк **ПОГРЕШНОСИ НАВИГАЦИОННОГО МАЯТНИКОВОГО КОМПЕНСАЦИОННОГО АКСЕЛЕРОМЕТРА ОТ ДЕЙСТВИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ И УГЛОВЫХ ВИБРАЦИЙ ОСНОВАНИЯ**

Разработана математическая модель методических вибрационных погрешностей маятникового компенсационного акселерометра с упругим подвесом чувствительного элемента, возникающих в наиболее общих условиях пространственного колебательного движения основания. Получены аналитические формулы для расчета этих погрешностей и выполнен их расчёт для навигационного акселерометра типа АК-6.

Ключевые слова: навигационный маятниковый компенсационный акселерометр; вибрационная погрешность; упругий подвес чувствительного элемента.

УДК 621.7.022.6

А. В. Малюкин, В. В. Поддубный, В. А. Поддубный **УСТРОЙСВА ПОВЫШЕНИЯ ЭКОНОМИЧНОСТИ ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ СВЕРХЛЕГКИХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Разработаны конструкции устройств подачи воды в камеру сгорания двигателей сверхлегких летательных аппаратов, исследованы их эффективность и характеристики.

Ключевые слова: устройства подачи воды, камера сгорания двигателей.

УДК 531.383.05

Т. А. Марченко, В. В. Попов **АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЕТА ПРИ НАБОРЕ ВЫСОТЫ**

В статье рассмотрены трудности выполнения вертикального маневра самолета, отмечено, что при этом резко возрастает расход топлива. Предложено использовать пилотирование самолета по системе самого экономичного и наивыгоднейшего режима полета.

Ключевые слова: самолет, высота, расход топлива.

УДК 621.317.725

Ю. М. Туз, О. М. Кривченкова, О. В. Синьоока **ПОХИБКИ ТЕРМОКОМПАРУВАННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДІВ АПРО-КСИМАЦІЇ**

Приведено исследование влияния выбора реперных точек и влияния шумовой составляющей измерения начальных данных на точность реализации аппроксимации, а так же возможное расширение границ экстраполяции. В статье приведены аналитические выражения зависимости погрешности нахождения коэффициентов аппроксимации от погрешностей нахождения значений входной и выходной величины, а так же погрешности решения аппроксимирующего уравнения в зависимости от погрешности определения коэффициентов полиномиальной модели.

Ключевые слова: аппроксимация, интерполяция, экстраполяция, погрешность аппроксимации.

УДК 519.222

Е. Т. Володарский, Н. А. Рековец **МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПРИЕМЛЕМОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ ДОРОГОСТОЯЩИХ УНИКАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ**

В данной статье предложен оптимальный метод оценки результата при проведении дорогостоящих измерений. Обоснована возможность использования в качестве оценки выходной величины не только среднего значения выборки и выборочной медианы, но и медианы по Гаствирту и Ходжесу-Леману, которые при определенных условиях дают более точные результаты, даже для случаев, когда один из элементов выборки находится вне критической зоны.

Ключевые слова**:** дорогостоящие измерения, метод оценки, малые выборки, медиана по Гаствирту, медиана Ходжесу-Леману.

УДК 004.67: 681.518.5

А. С. Шантырь **СОВМЕЩЕНИЕ ВЫБОРОК ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРИ НЕСИНХРОННЫХ ОТСЧЕТАХ В ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РОТОРНОЙ МАШИНЫ**

Разработан метод измерения интенсивности регулярной составляющей виброизмерительного сигнала и предложено устройство виброконтроля, которое обеспечивает защиту опорных подшипников роторной машины по двум показателям - СКЗ виброскорости и СКЗ прецессии вала, теоретически и экспериментально обоснована его эффективность. Установлены параметры предложенного устройства виброконтроля для электромеханических агрегатов, работающих на частоте 50±0,5 Hz, выполнена оценка его метрологических характеристик и найдена максимальная погрешность оценки показателя интенсивности воздействия на опорные подшипники прецессии вала ротора.

Ключевые слова: вибросигнал, устройство виброконтроля, контрольно-сигнальная аппаратура, информационно-измерительная система, роторная машина.

УДК 389.317

В. В. Литвих, С. А. Богомазов, Ю. С. Шумков, А. О. Назаренко **АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ИЗМЕРЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ РАЗНОПОЛЯРНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЯ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ**

Проведен анализ известных алгоритмов измерения погрешности разнополярности преобразователей напряжения термоэлектрических. Анализ показал, что при их использовании неисключенная систематическая погрешность измерения имеет большое значение. Предложен новый алгоритм измерения погрешности разнополярности преобразователей напряжения термоэлектрических. Проведен анализ неисключенной систематической погрешности, которая возникает при использовании предложенного алгоритма. Анализ показал, что его использование обеспечивает существенно меньшее значение неисключенной систематической погрешности.

Ключевые слова: преобразователь напряжения термо- электрический, погрешность разнополярности.

УДК 303.714

Е. Н. Сикоза, О. Ю. Редёга, Н. А. Яремчук **АНАЛИЗ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ С ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ ОБУЧЕНИЯ**

В статье проведен анализ функционирования системы с использованием индивидуальной траектории обучения, в которой прогнозирование оценок на выходе структурных единиц дидактического материала производится по начальным или текущим оценкам в вербальной шкале и нечеткому отношению "вход-выход" или матрицей перехода.

Ключевые слова: индивидуальная траектория обучения.

УДК 519.23

Е. В. Козыр **ЭТАПЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ПРИ МАЛЫХ ВЫБОРКАХ**

В статье рассмотрены основные критерии, рекомендуемые в ГОСТ Р ИСО 5725 для обработки данных. Исследовано влияние объема малых выборок на результаты, получаемые с помощью критериев Граббса и Кохрена, определены границы их применимости. Результаты исследования сведены в таблицу удобную для использования. Дан общий алгоритм обработки данных с рекомендациями по использованию.

Ключевые слова: малые выборки, обработка малых выборок, критерий Граббса, критерий Кохрена.

УДК 532.517

О. В. Микитченко, О. П. Мариношенко **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Вихревое движение сплошной среды перспективное направление для развития движителей механических конструкций, в том числе при разработке новых перспективных типов двигателей. Вывод математической модели вихревого движения проводится на основании законов гидродинамики.

Актуальность поставленной задачи состоит в том, что образование вихревого движения внутри двигателя позволить уменьшить затраты энергоносителей, а также в будущем перейти на альтернативные виды топлива.

Ключевые слова: вихревое движение, альтернативные виды топлива.

УДК.539.3

С. И. Трубачев, О. Н. Алексейчук **КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ**

Работа посвящена решению задачи о колебаниях стержневых конструкций переменного сечения вариационно-сеточным методом. Получены выражения для определения основных собственных частот при продольных и изгибных колебаниях стержней переменного сечения, исследовано влияние клиновидности и конусности на значения собственных частот.

***Ключевые слова*:** колебания, динамика стержневых конструкций, собственные частоты.

УДК 629.7.02

Д. Н. Зинченко, Т. В. Драган **ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ОКТЛОНЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ КРЫЛА СВЕРХКРИТИЧЕСКОЙ ПРОФИЛИРОВКИ НА АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ САМОЛЕТА**

Статья посвящена такой проблеме производства как отклонения, неточности, несоответствия теоретической модели и фактического образца, которые возникают из-за невозможности реализовать некоторые конструкторско-технологические решения на практике.

В работе использованы данные теоретических и фактических профилей опытного образца самолета, по которым построена расчетная модель. Результаты представлены графически, проведен анализ влияния геометрических отклонений на основные аэродинамические характеристики (коэффициент подъемной силы, лобового сопротивления, крутящий момент и т.д.) и предложены общие рекомендации по аэродинамическому проектированию крыльев. Также рассмотрен вариант замены предкрылка корневым наплывом и использование композиционных материалов вместо традиционных.

Создание крыла с необходимыми характеристиками начинается именно на этапе аэродинамического проектирования. Поэтому важно создать теоретическую модель, максимально приближенную к фактической, учесть погрешности, рассмотреть возможность упрощения и усовершенствования существующих конструкторско-технологических решений.

Ключевые слова: сверхкритический профиль, аэродинамические характеристики

УДК 621.7.022.6

А. В. Малюкин, В. В. Поддубный, В. А. Поддубный **УСТРОЙСВА ПОВЫШЕНИЯ ЭКОНОМИЧНОСТИ ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ СВЕРХЛЕГКИХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Разработаны конструкции устройств подачи воды в камеру сгорания двигателей сверхлегких летательных аппаратов, исследованы их эффективность и характеристики.

УДК: 519.6

В. В. Сухов, Ю. И. Бондар **ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ ТЕХНОЛОГИИ РАСЧЕТА ВНЕШНИХ НАГРУЗОК НА НЕСУЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ САМОЛЕТА**

В статье рассмотрены проблемы расчета нагрузок на несущие поверхности летательного аппарата на дозвуковых скоростях полета. Показан процесс и методы получения исходных данных для проведения исследований, структура программного комплекса.

Ключевые слова: нагрузка, самолет, исследования.

UDK 53.088:62 – 754.2 (045)

V. Apostolyuk, I. Gorbunovich **MATHEMATICAL MODEL OF CORIOLIS VIBRATORY GYROSCOPES MOTION TRAJECTORY**

Novel mathematical model, both accurate and approximated for the steady motion trajectory parameters, such as half axes and rotation angle, of Coriolis vibratory gyroscopes sensitive element as functions of design characteristics and external angular rate were obtained in this paper. Accuracy of the obtained models has been successfully demonstrated by means of comparison with the results of realistic numerical simulations.

Keywords**:** Coriolis vibratory gyroscope, motion trajectory.

UDK 586.383

O. Zbrutsky, S. Maljarov, T. Stetsenko **SYNTHESIS OF TWO-DIMENSION CONTROL SYSTEM WITH SYMMETRY**

The method of reducing the two-dimension gyroscope control system with symmetry and connect channels to one- dimension is proposed. The algorithm or optimal synthesis of such control system is created on the basis of methods for one – dimension systems. The optimal algorithms structure is created and the method of synthesis is shown. The achievement of guaranty accuracy of control system under undetermined disturbances is allowed by this algorithm.

Keywords**:** control and stabilized system, connect channels, dynamic symmetry, optimal control algorithm.

UDK: 681.3+615.89

O. M. Melaschenko, L. M. Ryzhkov, Fam Ba Khan **MAGNETIC-REACTION-WHEELS SATELLITE CONTROL**

The dynamics of microsatellite is analyzed at the use of reaction-wheels and magnetic coils in the control system. As a mean of exception of reaction-wheels saturation is examined the introduction of integral constituent to the law of coils control. Efficiency of the offered law of control is shown.

Keywords: microsatellite, reaction-wheel, magnetic coil, control law.

UDK 531.383.25

S. V. Morozov, K. V. Tochtamysheva **FORMULATING OF GOALS OF LANDING APPROACH AUTOMATIC CONTROL SYSTEM WITH ARBITRARY ANGLE OF AERODROME APPROACH**

The difficulties of synthesis of landing approach automatic control system for modern aeroplanes with arbitrary angle of aerodrome approach are noted in the article. One feature of the given mode is that the pilot is not always able to make the decision about continuation of landing approach or leaving for the second circle in time.

As the realization a possibility of synthesis of control system of an airplane flight in the lateral plane at landing approach with application of some dependences by means of computer technology «MATLAB» is shown.

Keywords: airplane, langing, vertical speed.

UDK 531.768

N. G. Chernyak **ERRORS OF THE NAVIGATION PENDULOUS COMPENSATING ACCELEROMETER FROM A SPATIAL LINEAR AND ANGLE VIBRATION OF THE BASE**

This work describes creation of a mathematical model of continuous vibratory errors of the compensating accelerometer with a sensitive element resilient suspension. The described errors appear in most general conditions of a spatial oscillatory motion of the pendulous base. Analytic formulas for calculating these errors were also received. Calculations of these errors for the navigation accelerometer AK-6 were carried out.

Keywords: navigation compensating pendulous accelerometer; vibratory error; sensitive element resilient suspension.

UDK 531.383.05

T. Marchenko, V. Popov **AUTOMATICE CONTROL OF THE LONGITYDINAL AIRPLAIN'S MOTION DURING CLIMBING**

In this article difficufties of the vertical maneur of the airplaine are deseribed . In is observed that in this case expend of fuel is rather higher . Proposed using the way of controlling of the airplaine by the system of the most economic and profitable regime of flight.

Keywords::airplane, altitude, fuel expend.

UDK 621.317.725

Ю. М. Туз, О. М. Кривченкова, О. В. Синьоока ПОХИБКИ ТЕРМОКОМПАРУВАННЯ ЗІ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДІВ АПРОКСИМАЦІЇ

The study of an influence of a node point choice and an influence of noise term of the initial data measurement on approximation accuracy, and a possible bound widening for the extrapolation are considered. The analytic form of an error of an approximation coefficient finding dependency on errors of input and output values, and also the dependency of a solution of approximation equation on an error of a polynomial coefficients finding are also held in the article.

***Keywords*:** approximation, interpolation, extrapolation, approximation error.

UDK 519.222

E. T. Volodarsky, N. O. Rekovets **THE ESTIMATION METHODS OF TESTS RESULTS OF EXPENSIVE UNIQUE OBJECTS**

In this article is offered the optimum method of an estimation of result at carrying out of expensive measurements. Possibility of use as an estimation of target size not only sample average value and a simple median, but also a median on Gastwirt and Hodges-Lehmann who under certain conditions yield more exact results, even for cases when one of sample units is out of a critical zone is proved.

Keywords: expensive measurements, an estimation method, small samples, a median on Gastwirt, a median of Hodges-Lehmann.

UDK 004.67: 681.518.5

A. Shantyr **MATCHING SAMPLES OF PERIODIC PROCESS WITH ASYNCHRONOUS SAMPLING IN INFORMATION-MEASURING SYSTEMS OF ROTARY MACHINE**

This study proposes method of measuring the intensity of regular component of the vibration signal and proposes vibration control device, which secure supporting bearings of rotary machine by checking two indicators - vibration velocity RMS and shaft precession RMS; theoretically and experimentally proved device effectiveness. Determined parameters of proposed vibration control device working with electromechanical units running at frequency 50±0,5 Hz, estimated its metrological characteristics and evaluated maximum error of estimation of intensity indicator of influence supporting bearings of rotary machine by rotor shaft precession.

Keywords: vibration signal, vibration control device, supervisory and warning equipment, information-measuring system, rotary machine.

UDK 389.317

V. V. Litvikh, S. A. Bogomazov, Ju. S. Shumkov, A. O. Nazarenko **THE ANALYSIS OF REVERSAL ERROR MEASUREMENT ALGORITHMS FOR THERMAL VOLTAGE CONVERTERS**

There were analyzed some known algorithms of reversal error measurement for thermal voltage converters. The analysis has demonstrated the great importance of the non-excluded systematic measurement error when using such algorithms. There has been proposed a new reversal error measurement algorithm for thermal voltage converters. There has been analyzed the non-excluded systematic error appearing when using the proposed algorithm. The analysis has shown the value of the non-excluded systematic error to be significantly lower when using this algorithm.

Keywords: thermal voltage converter, reversal error.

UDK 303.714

E. N. Sikoza, O. Ju. Redyoga, N. A. Jaremchuk **THE ANALYSIS OF FUNCTIONING OF THE SYSTEM WITH THE INDIVIDUAL TRAJECTORY OF STUDIES**

In the article the analysis of functioning of the system is conducted with the use of individual trajectory of studies, in which prognostication of estimations on the output of morphons of didactics material is conducted on initial or current estimations in a verbal scale and unclear relation "an entrance - an output" or by a transition matrix.

Keywords: individual trajectory of studies.

UDK 519.23

O. V. Kozyr **STAGES OF SMALL SAMPLE DATA CALCULATIONS**

The main criterions used in the GOST R ISO 5725 were considered. The influence of sample size on the results of using criterions of Kochren and Grabbs was investigated and the limitations of use were defined. The main results were in the table brought together which could help assist in work. The common algorithm of data calculation was present and some guidelines about use was given.

Keywords: small samples, small samples calculation, outliners, Grabbs criterion, Kochren critetion.

UDK 532.517

O. Mykytchenko, O. Marynoshenko **MATHEMATICAL MODEL OF VORTEX MOTION OF CONTINUUM**

Continuum vortex motion a perspective direction for development of proposer's mechanical construction, including by working out of new perspective types of engines. The conclusion of mathematical model of vortex motion is conducted on the basis of hydrodynamics laws.

The task in view urgency consists that formation of vortex motion in the engine to allow to reduce expenses of energy carriers, and also in the future to pass to alternative kinds of fuel.

In the article modern achievements in hydrodynamics are considered, approaches to definition and the description of vortex motion of continuum in which quality perfect fluid is considered are considered.

Keywords: mathematical model of vortex motion.

UDK.539.3

S. Trubachev, O. Alekseichuk **VIBRATIONS OF A ROD WITH VARIABLE CROSS SECTION**

The article is devoted to solving the problem of vibrations of beam structures with variable cross section of the variation - grid method. Expressions for determining the fundamental natural frequencies for longitudinal and flexural vibrations of rods with variable cross section, studied the effect of wedge and taper on the values of natural frequencies.

Keywords: vibrations, the dynamics of beam structures, the natural frequencies

UDK 629.7.02

Zinchenko D., Dragan T. **ASSESSMENT OF INFLUENCE OF WING SURFACE DISCREPANCY OF THE SUPERCRITICAL AIRFOIL ON AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF AIRPLANE**

The article covers the problem of discrepancies, inaccuracies, uncertainties of theory and real model, which originate from impossibility design research implementation.

In work theory and real airfoil data was used for calculation model creation. The results were presented on graphics, made an analysis of geometric deviation influence the main aerodynamic characteristics (lift coefficient, drag coefficient, torque, etc.), proposed aerodynamic designing recommendation, variant of the replacement of the leading edge flap by a root swelling and the traditional material by a composite.

Wing creation with necessary characteristics starts from aerodynamic designing. That's why theory model must be as much approximate as possible to real one, allows for an inaccuracies, considers possibility of simplification and updating of usable technological decision.

Keywords: supercritical airfoil, aerodynamic characteristics

UDK 621.7.022.6

O. V. Malyukin, V. V. Piddubny, V. O. Piddubny **DEVICE FOR INCREASED ENGSNE EFFICIENCY FOR ULTRALIGHT AIRCRAFT**

Have designed a device pumping water into the combustion engine for ultralight aircraft. Investigate the effectiveness and performance.

UDK: 519.6

V. Suhov, Y. Bondar **THE PROBLEMS OF THE DEVELOPMENT TO TECHNOLOGIES OF THE CALCULATION OF THE EXTERNAL LOADS ON CARRYING SURFACES OF THE PLANE**

Problems of the calculation of the loads are considered in article on carrying surfaces of the flying machine on subsonic velocity of the flight. It is Shown process and methods of the reception of the raw datas for undertaking the studies, structure of the programme complex.

Keywords: loads, airplane, calculation.