УДК.539.3

С.И.Трубачев, О.Н.Алексейчук

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Введение

Стержневые системы и стержни широко применяются в авиационной технике. В процессе работы стержни подвергаются значительному воздействию вибрационных нагрузок. В связи с различными условиями закрепления стержней большое значение имеет численный анализ колебаний указанных конструкций.

В настоящее время существует большое количество работ, посвященных колебанию стержней [1],[2]. Очень актуально исследование колебаний стержней переменного сечения [3], а также анализ влияния конусности или клиновидности на величину частот продольных или изгибных колебаний, что необходимо для частотного анализа конструкций , и не было исследовано до настоящего времени.

Исследование колебаний стержней переменного сечения приводят к построению решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые учитывают изменения поперечных сечений по длине. Сложность решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами обусловила недостаточное количество публикаций по этой тематике. Настоящая статья позволяет глубже изучить эту проблему.

Постановка задачи

При расчете на вибропрочность основная трудность заключается в определении спектра собственных частот и форм колебаний механической системы и, в общем случае, сводится к известной обобщенной задаче на собственные значения:

$$(Ku, v) = \omega^2 (Mu, v), \quad \forall\, v \in V, \qquad (1)$$

где V – множество допустимых функций, $(Ku, v), (Mu, v)$ – семейство симметричных билинейных непрерывных форм, соответствующих амплитудным значениям потенциальной и кинетической энергии системы, K - матрица жесткостей, M – матрица масс.

При решении задачи численными методами бесконечномерное пространство допустимых функций V заменяется конечномерным V_h путем дискретизации системы. При этом задача (1) заменяется приближенной: для заданного конечномерного пространства V_h необходимо найти такие значения ω, u_h, что

$$(Ku_h, v_h) = \omega^2 (Mu_h, v_h), \quad \forall\, v_h \in V_h, \tag{2}$$

с учетом кинематических граничных условий

$u_{ih} = \widehat{u_{ih}}$; где $\widehat{u_{ih}} \in \Gamma_u$.

При решении прикладных задач для стержневых систем наибольший интерес представляет несколько наименьших собственных частот и соответствующих им форм колебаний. Таким образом, приходим к неполной задаче на собственные значения. Поскольку эта задача является нелинейной, то целесообразно использовать численные методы.

Определение собственных частот

При продольных колебаниях стержня силы направлены вдоль прямолинейной оси, а напряжения и деформации распределены по площади сечения равномерно. Амплитудные значения потенциальной и кинетической энергии стержня выглядят таким образом:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 dx; \; T = \frac{1}{2}\,\omega^2\int_0^l \rho F\, u^2 dx\,, \tag{3}$$

здесь E – модуль Юнга; F – площадь поперечного сечения; ρ – плотность материала; l – длина стержня.

Продольные перемещения аппроксимируются линейным полиномом:

$$u(x) = u_i + \frac{u_j - u_i}{l}\, x\,, \tag{4}$$

где u_j и u_i – перемещения i – го и j–го узлов.

В случае изгибных колебаний стержня амплитудные значения потенциальной и кинетической энергии имеют вид:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 dx; \; T = \frac{1}{2}\,\omega^2\int_0^l \rho F\, w^2 dx\,, \tag{5}$$

В данном случае для аппроксимации перемещений используем полином 3–го порядка:

$$w(x) = \frac{W_i}{l^3}(2x^3 - 3x^2 l + l^3) + \frac{W_j}{l^3}(3x^2 l - 2x^3) + \varphi_i \frac{1}{l^2}(xl^2 - 2x^2 l \; - \\ + \varphi_j \frac{1}{l^3}(x^3 - x^2 l). \tag{6}$$

Для решения задачи (2) использовался итерационный метод покоординатного спуска [4], применение которого позволяет избегать трудностей, связанных с формированием, хранением и оперированием с матрицами масс и жесткостей [5].

При продольных колебаниях стержня в форме клина или конуса первую собственную форму колебаний системы можно представить уравнением:

$$u_1(x_1) = \left(1 - \frac{x_1^2}{l^2}\right); \;\; EFu_1'(0) = u_1(l) = 0. \qquad (7)$$

Физико–геометрические характеристики стержней изменяются по биномиальным законам [6]:

$$\begin{aligned} &EF_1(x_1) = A(l_1 \pm x_1)^m; \;\; \rho F(x_1) = B(l_1 \pm x_1)^n; \\ &A = EF_1 l_1^{-m}; \quad B = \rho F_1 l_1^{-n}; \end{aligned} \qquad (8)$$

где конусность и приведенная длина соответственно равны [6]:

$$\lambda_1 = \frac{r_2}{r_1} > 1, \qquad l_1 = l(\lambda_1 - 1).$$

Для определения основной собственной частоты используется формула Релея:

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^l EF(u')^2 dx}{\int_0^l \rho F u^2 dx}. \qquad (9)$$

Подставляя (7), (8) в (9), получим соответственно при n=1для клина и при n=2 для конуса:

$$\omega_1^2 = k_1^2 \frac{E}{\rho}, \qquad (10)$$

где характеристические числа равны:

$$\begin{aligned} &k_1^2 = \frac{10(4l_1 + 3l)}{(5l_1 + 16l)l^2}, \qquad n = 1; \\ &k_1^2 = \frac{7(20l_1^2 + 30l_1 l + 12l^2)}{(8l^2 + 35l_1 l + 56l_1^2)l^2}, \qquad n = 2. \end{aligned} \qquad (11)$$

При изгибных колебаниях консольных стержней с биномиальными законами изменения сечений:

$$EI(x_1) = A(l_1 \pm x_1)^m; \;\; \rho F(x_1) = B(l_1 \pm x_1)^n; \qquad (12)$$

$$A = EI_1 l_1^{-m}; \quad B = \rho F_1 l_1^{-n}. \qquad (13)$$

Первую форму колебаний можно представить приближенным уравнением

$$w(x_1) = (1 - \tfrac{x_1}{l})^2, \qquad (14)$$

которое удовлетворяет только кинематическим граничным условиям:

$$w(0) = w'(0) = 0. \qquad (15)$$

Формула Релея при изгибных колебаниях имеет вид:

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^l EI(w'')^2 dx}{\int_0^l \rho F w^2 dx}. \qquad (16)$$

Подставляя (12), (14) в (16), получим для основной частоты формулы:

$$\omega_1^2 = \widetilde{\omega_1^2}\left[\frac{EI_1}{\rho F_1 l^4}\right] = \widetilde{\omega_1^2}\frac{1}{\lambda_1^2 l^4}\left[\frac{EI_2}{\rho F_2}\right] \qquad (17)$$

в зависимости от величины конусности стержня и соотношения $EI_1/\rho F_1$.

В формулах (17) частотный параметр $\widetilde{\omega_1^2}$ выражается через приведенную l_1 и реальную l длины стержня так:

$$\widetilde{\omega_1^2} = \frac{30(4l_1^3 + 6l_1^2 l + 4l_1 l^2 + l^3)}{(6l_1 + l)l_1^2}, n = 1;$$
$$\widetilde{\omega_1^2} = \frac{84(5l^4 + 10l_1^4 l + 10l_1^2 l + 5l_1 l^3 + l^4)}{(21l_1^2 + 7l_1 l + l^2)l_1^2}, n = 2. \qquad (18)$$

Оценим влияние конусности (клиновидности) стержня на основную частоту на числовых примерах.

Пример 1.

Найти основные частоты продольных колебаний конуса при конусности $\lambda_1 = 1; 1{,}2; 1{,}5; 2$.

По второй формуле (11) получим безразмерные значения характеристических чисел $k_1 l = 1{,}581; 1{,}711; 1{,}877; 2{,}09$. Подставив в формулу (9), можно получить соответствующие частоты.

Результаты расчета сравнивались с точным решением [6]:

$k_1 L = 1{,}5; 1{,}688; 1{,}835; 2{,}03$.

Пример 2.

Определить значения основных частот изгибных колебаний консольного клина при следующих значениях λ_1: $\lambda_1 = 1{,}2{,}4$.

По формуле (17) вычисляем значения частотного параметра

$\widetilde{\omega_1} = 4{,}474; 4{,}08; 4{,}21; 5{,}48$.

Точные значения частотного параметра, полученного в работе [6], следующие:

$\widetilde{\omega_1} = 3{,}52; -; 4{,}00; 4{,}61.$

Из результатов расчета видно, что с увеличением клиновидности (конусности) значения основной частоты тоже увеличиваются.

Выводы

В работе предложен один из методов решения задачи о колебаниях стержневых конструкций переменного сечения. Для определения динамических характеристик использовался вариационно–сеточный метод. Получены аналитические выражения для определения собственных частот для стержней переменного сечения. Исследовано влияние конусности на значения собственных частот, что дает возможность проектировать стержневые конструкции с заданными динамическими характеристиками.

Предложенный подход предполагается распространить на пространственные стержневые системы, состоящие из стержней переменного сечения.

Список использованной литературы

1. *Бабаков И. Н.* Теория колебаний.–М.: Наука, 1968.–559с.
2. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем.–М.: Машиностроение, 1070.– 734с.
3. *Василенко М. В., Алексейчук О. М.* Теорія коливань і стійкості руху.–К.: Вища шк., 2004,–549с.
4. *Бабенко А. Е.* Застосування і розвиток метода покоординатного спуску в задачах визначення напружено–деформованого стану при статичних та вібраційних навантаженнях. – К.: КПІ, 1996. – 96с.
5. *Бабенко А. Е., Бобырь Н. И., Бойко С. Л., Боронко О. А.* Применение и развитие метода покоординатного спуска в задачах определения напряженно–деформированного состояния при статических и вибраионных нагрузках. – К.: Инрес, 2005. – 264с.
6. *Динник А. Н.* Избранные труды. К.: из–во АН УССР, 1965, – 719с.