

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИХРОВОГО РУХУ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

Вступ

Вирішення задачі щодо моделювання вихрового руху середовища з метою штучного створення та подальшого застосування в практичних цілях вихрових рухів суцільного середовища, наприклад, при проектуванні перспективних двигунів та елементів перспективних рухомих механічних об'єктів, є актуальною та важливою науково-технічною задачею сьогодення.

Вихрові двигуни є новим та перспективним напрямком в двигунобудуванні. В основі створення такого двигуна є штучне утворення вихору та використання ефекту його самопідтримки.

Створення двигуна на основі вихрового принципу руху робочого тіла дозволить зменшити витрати енергоносіїв, а в майбутньому перейти на альтернативні види палива.

Постановка задачі

Основою роботи вихрового двигуна є штучне утворення всередині об'єму двигуна вихрового руху робочого тіла. Для виводу математичної моделі вихрового руху необхідно розглянути питання щодо утворення вихору в замкненому об'ємі. В даній статті на основі власних теоретичних досліджень та аналізі досліджень інших авторів необхідно проаналізувати та обґрунтувати математичну модель вихрового руху робочого тіла безлопасного двигуна, а також виникнення явища само підтримки вихору, що створюється в робочому об'ємі двигуна, визначити та дослідити особливості траєкторій руху робочого тіла.

Рівняння руху робочого тіла вихору

В якості середовища для дослідження вихрового руху будемо обирати ідеальну рідину.

В загальному випадку тривимірний рух ідеальної рідини задається полем течії, що визначається вектором швидкості $\vec{\Omega} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$, де u, v, w – проекції швидкості на осі прямокутної системи координат, тиском p , густиною ρ .

Для опису руху рідини необхідно записати три рівняння руху та рівняння нерозривності, яке в загальному випадку буде мати наступний вигляд [1]

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{\Omega} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{\Omega}) = 0,$$

де $\frac{D\rho}{Dt}$ – субстанціальна похідна, що складається з локальної похідної $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, яка враховує нестационарний рух рідини, і конвективної похідної $\vec{\Omega} = \operatorname{grad} \rho$, яка враховує переміщення матеріальних частинок рідини.

Рівняння руху в векторній формі можна представити у наступному вигляді

$$\rho \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} = \vec{K} + \vec{P}, \quad (1)$$

де $\vec{K} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z$ – вектор масових сил, $\vec{P} = \vec{i}P_x + \vec{j}P_y + \vec{k}P_z$ – вектор поверхневих сил.

Розпишемо детальніше вектор поверхневих сил, для цього виділимо в рідині матеріальну частинку у вигляді паралелепіпеда.

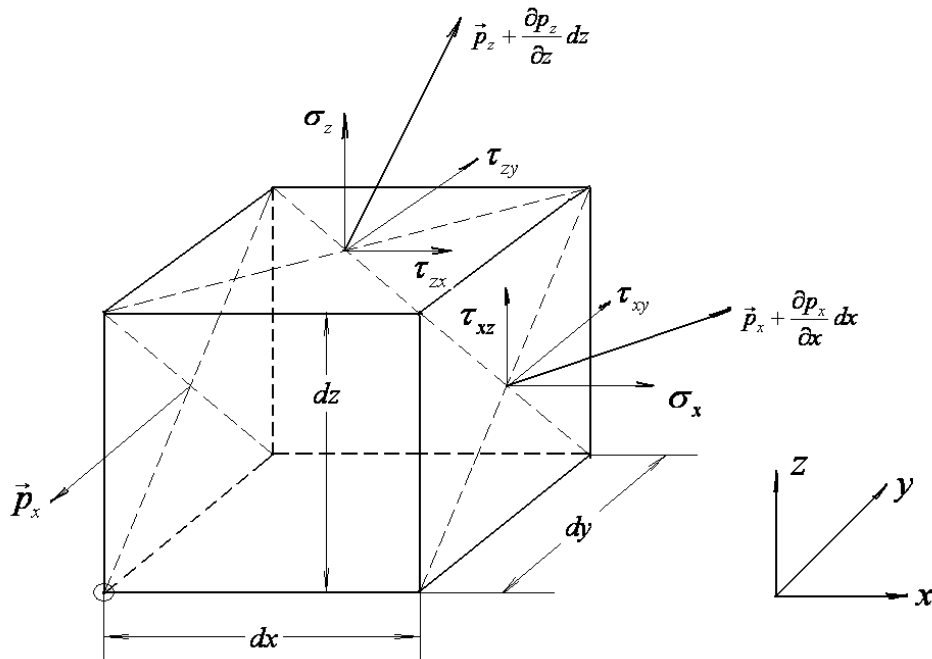


Рис. 1. Досліджувана частинка рідини

З рис. 1. можна записати складові результуючої поверхневої сили по координатним осям $\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx dy dz$, $\frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} dx dy dz$, $\frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dx dy dz$ і розділивши на об'єм, отримаємо вираз для шуканої сили

$$\vec{P} = \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\text{де } \vec{p}_x = \vec{i}\sigma_x + \vec{j}\tau_{xy} + \vec{k}\tau_{xz}, \vec{p}_y = \vec{i}\tau_{yx} + \vec{j}\sigma_y + \vec{k}\tau_{yz}, \vec{p}_z = \vec{i}\tau_{zx} + \vec{j}\tau_{zy} + \vec{k}\sigma_z \quad (3)$$

Підставляючи вираз (3) в (2), отримуємо

$$\vec{P} = \vec{i} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right).$$

Після підстановки останнього виразу в рівняння (1), отримуємо скалярні рівняння руху рідини в проекціях на осі обраної декартової системи координат

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= X + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= Y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= Z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Для подальшого виводу рівнянь руху досліджуваної матеріальної частинки рідини (з врахуванням сил в'язкого тертя) будемо використовувати співвідношення Стокса [1, 2]

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= -\frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\Omega + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma'_y &= -\frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\Omega + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma'_z &= -\frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\Omega + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5)$$

де μ – коефіцієнт в'язкості; $\sigma'_x = \sigma_x + p$, $\sigma'_y = \sigma_y + p$, $\sigma'_z = \sigma_z + p$.

Тоді складові результуючої сили \vec{P} через проекції швидкості u, v, w можна виразити наступним чином

$$P_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\Omega \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

для запису проекцій P_y та P_z необхідно використовувати правило циклічної перестановки індексів.

Остаточно отримуємо основні рівняння руху неідеальної в'язкої рідини

$$\begin{aligned}
\rho \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \Omega \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right], \\
\rho \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \Omega \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \\
\rho \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \Omega \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right].
\end{aligned}
\tag{6}$$

Для випадку нестисливої рідини з постійним коефіцієнтом в'язкості рівняння (6) запишуться у вигляді

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\
\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\
\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).
\end{aligned}
\tag{7}$$

Для зручності подальшої роботи рівняння (7) запишемо в циліндричних координатах, позначивши через r, φ, z – радіальну, осьову та кільцеву координати, а через v_r, v_φ, v_z – складові швидкості в проекціях на осі обраної циліндричної системи координат.

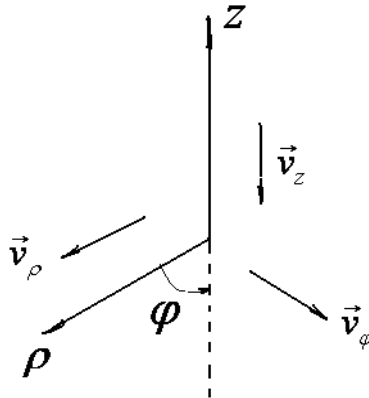


Рис. 2. Циліндрична система координат

В проекціях на осі обраної циліндричної системи координат диференціальні рівняння руху рідини матимуть наступний вигляд

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \\
& K_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \\
& \rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) = \\
& K_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right), \\
& \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\
& K_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Обертальний рух рідини

Розглянемо рух рідини, що знаходиться поблизу диска, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω . В даному випадку ми розглядаємо тривимірну модель обертального руху рідини. Вид такого руху показано на рис. 3.

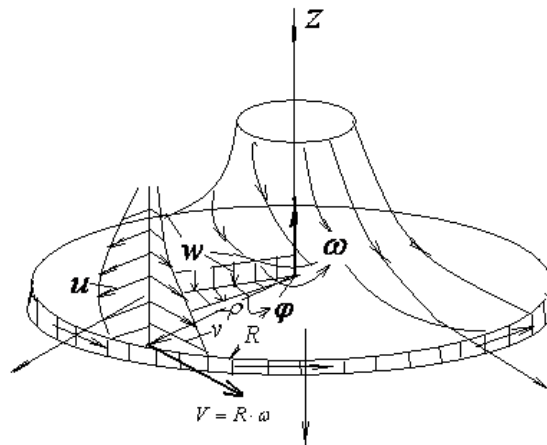


Рис. 3. Рух в околі диска, що обертається в рідині

Внаслідок осьової симетрії руху рідини рівняння (8) спрощуються до наступного вигляду

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{ur^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right], \\
u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \nu \left[\frac{\partial^2 v}{ur^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right], \\
u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 w}{ur^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right], \\
\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

де ν – відносний коефіцієнт в'язкості рідини.

Рівняння руху рідини в компонентах вихору

Рівняння, що визначають неперервний рух матеріальної частинки ідеальної рідини, можна представити в спрощеному вигляді (не враховуючи коефіцієнта в'язкості і поверхневих сил). Рівняння руху ідеальної рідини в декартових координатах з врахуванням (7) мають наступний вигляд [2]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Система рівнянь руху рідини (10) дає зв'язок між діючими на рідину зовнішніми об'ємними силами, взаємними тисками її частинок і швидкостями останніх. Рівняння нерозривності в даному випадку має наступний вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Але цей зв'язок має суттєвий недолік, що не дозволяє відразу розділити усі можливі рухи рідини на два абсолютно різні за властивостями класи: невихровий і вихровий рухи.

Між тим поділ рухів рідини на вихровий та невихровий дає можливість встановити характерні властивості, загальні кожному їх класу, що дозволить в подальшому не лише глибше зрозуміти механічну суть багатьох особливостей, що спостерігаються при русі рідини, але й уявити

ті умови, виконання яких дозволить здійснення руху рідини певного виду. Для цього представимо систему рівнянь руху рідини (10) в іншій формі.

Зазначимо той факт, що якщо через $W^2 = u^2 + v^2 + w^2$ позначити квадрат швидкості руху матеріальної частинки рідини, то часткове диференціювання цього виразу по координатах x, y, z дає нам вирази

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}W^2\right) &= u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}W^2\right) &= u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}W^2\right) &= u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z},\end{aligned}$$

де $\frac{1}{2}W^2$ є деяка силова характеристика розглядуваної матеріальної частинки рідини. Позначимо наступні різниці

$$\begin{aligned}u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}W^2\right), \quad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}W^2\right), \\ u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}W^2\right),\end{aligned}$$

у вигляді

$$\begin{aligned}u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} - w\frac{\partial w}{\partial x} &= w\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) - v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - u\frac{\partial u}{\partial y} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial y} &= u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - w\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - u\frac{\partial u}{\partial z} - v\frac{\partial v}{\partial z} - w\frac{\partial w}{\partial z} &= v\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) - u\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

Використовуючи позначення

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (12)$$

і віднімаючи від обох частин виразів (10) відповідно осям координат вирази $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}W^2\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}W^2\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}W^2\right)$ систему рівнянь руху (10)

перепишемо у наступному вигляді

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + 2(\eta w - \zeta v) &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} W^2 \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\zeta u - \xi w) &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} W^2 \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(\xi v - \eta u) &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} W^2 \right).\end{aligned}\tag{13}$$

Рух рідини, описаний рівняннями (13), називається вихровим (вперше назвав Гельмгольц), а величини ξ, η, ζ компонентами вихору по осям X, Y, Z .

Запишемо формулу для секундного об'єму рідини, що відкидається на зовні від диска з однієї сторони

$$Q = 2\pi R \int_{z=0}^{\infty} u dz,$$

де R – радіус диска.

Обчислюючи інтеграл, отримаємо наступний вираз

$$Q = 0,886\pi R^3 \omega \text{Re}^{-1/2}.\tag{14}$$

Вихрові трубки

Для практичної реалізації вихрового руху пропонуємо використовувати матеріальне тіло – так звану вихрову турбіну, що має лопатки спіралевидної форми, як показано на рис. 4.

Для подальших досліджень розглянемо утворення і рух вихрових трубок.

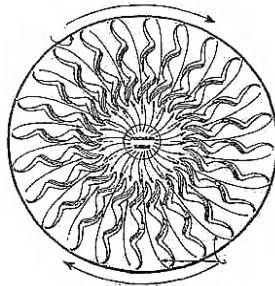


Рис. 4. Вид турбіни вихрового двигуна

Вважаємо, що утворення вихору всередині двигуна відбувається не лише завдяки обертанню диска, а й за рахунок утворення вихрових трубок на виході турбіни.

Розглядаючи малі вихрові трубки, припускаємо, що траєкторії їх руху мають форму тору, який характеризується двома параметрами – двома радіусами (тор – тіло обертання кола з радіусом r_1 навколо осі $Z-Z$ та кола радіусом r_2 навколо точки O_2 , як показано на рис. 5).

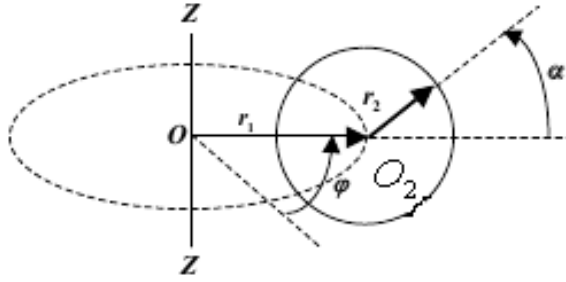


Рис. 5. Схема руху тору при $r_1 = r_2 = 1$.

Замкнені криві, що знаходяться на торі і не стягуються в точку, будемо називати тороїдами. Розрізняють два класи тороїд: тороїди поздовжнього типу, які стягуються до центру тору і тороїди поперечного типу, що охоплюють зовнішню границю тору. Доведено, що при вивертанні тору тороїди поздовжнього і поперечного типу міняються місцями [5]. Тор можна охарактеризувати спіралевидними тороїдами поздовжнього і поперечного типів, відповідні рівняння таких кривих в циліндричній системі координат мають наступний вигляд

$$\vec{\rho} = (1 + \cos(\frac{\Phi}{\omega}))\vec{e} + \sin(\frac{\Phi}{\omega})\vec{k}, \quad \vec{\rho} = (1 + \cos(\varphi \cdot \omega))\vec{e} + \sin(\varphi \cdot \omega)\vec{k}, \quad (15)$$

де ρ – радіус вектор, $\vec{e} = \vec{i} \cdot \cos(\varphi) + \vec{j} \cdot \sin(\varphi)$, ω – кількість витків тороїди, $\frac{\Phi}{\omega} = \alpha$ або $(\omega \cdot \varphi = \alpha)$ (рис. 4).

На основі виразів (15) бачимо, що для того щоб описати вивертання тору, необхідно в рівняння тороїди поздовжнього типу параметр ω замінити на протилежний $\frac{1}{\omega}$ і навпаки.

Розглянемо детальніше вираз (15) і прийнемо для спрощення кількість витків $\omega = 1$, що відповідає опису однієї вихрової трубки, тоді при $\varphi = \alpha$, матимемо

$$\vec{\rho} = (\vec{i} \cdot \cos(\varphi) + \vec{j} \cdot \sin(\varphi)) + \cos(\varphi)(\vec{i} \cdot \cos(\varphi) + \vec{j} \cdot \sin(\varphi)) + \sin(\varphi) \cdot \vec{k}. \quad (16)$$

Зберемо подібні при одиничних ортах

$$\vec{\rho} = \vec{i} \cdot (\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)) + \vec{j} \cdot (\sin(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\varphi)) + \vec{k} \cdot \sin(\varphi). \quad (17)$$

Візьмемо похідну за часом від радіус-вектора, щоб виділити проекції швидкості на осі обраної циліндричної системи координат

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\rho}}{dt} = & \vec{i} \left[-\sin(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} - 2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right] + \vec{j} \left[\cos(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} + \cos(2\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right] + \\ & + \vec{k} \cos(\varphi) \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \quad (18)$$

Вираз (18) описує рух однієї вихрової трубки. Але для диску, що зображений на рис. 3, необхідно врахувати, що вихрових трубок буде $\omega = 24$. Враховуючи вище сказане, вираз для введених кутових параметрів матиме наступний вигляд

$$\frac{\varphi}{24} = \alpha \quad \text{або} \quad \varphi \cdot 24 = \alpha,$$

де, $\alpha = \Omega r_2 t$, Ω – швидкість обертання точки рідини (диску турбіни) навколо осі Z.

Запишемо вирази для проекцій швидкості на осі декартової системи координат

$$\begin{aligned} V_x &= -\frac{d\varphi}{dt}(\sin(\varphi) + \sin(2\varphi)), \\ V_y &= \frac{d\varphi}{dt}(\cos(\varphi) + \cos(2\varphi)), \\ V_z &= \frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi). \end{aligned} \tag{19}$$

Для проведення подальших досліджень необхідно виразити проекції швидкостей в циліндричній системі координат через відомі проекції в декартовій системі координат

$$\begin{aligned} u &= V_\rho = V_x \cos(\varphi) + V_y \sin(\varphi), \\ v &= V_\varphi = V_x \sin(\varphi) - V_y \cos(\varphi), \\ w &= V_z = V_z. \end{aligned} \tag{20}$$

Звідси швидкості в циліндричній системі координат матимуть наступний вигляд

$$\begin{aligned} u &= -\frac{d\varphi}{dt}\sin(\varphi), \\ v &= -\frac{d\varphi}{dt}(1 + \cos(\varphi)), \\ w &= \frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi). \end{aligned} \tag{21}$$

Остаточна математична модель вихрового руху рідини (13) з врахуванням (20) і (21) матиме наступний вигляд

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{d\varphi}{dt} \sin(\varphi) \right) + 2 \left(\eta \left(\frac{d\varphi}{dt} \cos(\varphi) \right) - \zeta \left(-\frac{d\varphi}{dt} (1 + \cos(\varphi)) \right) \right) = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \\
& - \left(-\frac{d\varphi}{dt} \sin(\varphi) \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{d\varphi}{dt} \sin(\varphi) \right) - \frac{d\varphi}{dt} (1 + \cos(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{d\varphi}{dt} (1 + \cos(\varphi)) \right) + \frac{d\varphi}{dt} \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\varphi}{dt} \cos(\varphi) \right), \\
& \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{d\varphi}{dt} (1 + \cos(\varphi)) \right) + 2 \left(\zeta \left(-\frac{d\varphi}{dt} \sin(\varphi) \right) - \xi \left(\frac{d\varphi}{dt} \cos(\varphi) \right) \right) = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \\
& - \left(-\frac{d\varphi}{dt} \sin(\varphi) \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{d\varphi}{dt} \sin(\varphi) \right) - \frac{d\varphi}{dt} (1 + \cos(\varphi)) \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{d\varphi}{dt} (1 + \cos(\varphi)) \right) + \frac{d\varphi}{dt} \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d\varphi}{dt} \cos(\varphi) \right), \\
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\varphi}{dt} \cos(\varphi) \right) + 2 \left(\xi \left(-\frac{d\varphi}{dt} (1 + \cos(\varphi)) \right) - \eta \left(-\frac{d\varphi}{dt} \sin(\varphi) \right) \right) = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \\
& - \left(-\frac{d\varphi}{dt} \sin(\varphi) \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{d\varphi}{dt} \sin(\varphi) \right) - \frac{d\varphi}{dt} (1 + \cos(\varphi)) \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{d\varphi}{dt} (1 + \cos(\varphi)) \right) + \frac{d\varphi}{dt} \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d\varphi}{dt} \cos(\varphi) \right).
\end{aligned}$$

Висновок

В статті на основі розглянутого підходу до виводу загальних рівнянь руху рідини розглянуто процес виникнення вихору в матеріальному середовищі, що обертається з певною кутовою швидкістю. В якості досліджуваного матеріального середовища в кінцевому рахунку розглядається ідеальна рідина. Вибір ідеальної рідини, як варіанту досліджуваного рухомого суцільного середовища пов'язаний з подальшою практичною реалізацією математичного моделювання процесу формування вихору.

Виведені рівняння руху рідини в декартовій та циліндричній системах координат в компонентах вихору, що дають змогу виділити вихровий та невихровий рухи рідини та описати процес вихроутворення. Розглянуто питання руху вихрових трубок та запропоновано конкретні рівняння їх траєкторії.

В подальшому авторами будуть розглянуті питання реалізації принципів утворення вихору при обертальному русі рідини в замкненому об'ємі, при цьому будуть розраховані основні параметри вихрового руху рідини, це дасть змогу показати та обґрунтувати в подальшому явище самопідтримки вихору.

Список використаної літератури

1. Шлихтинг Г. «Теория пограничного слоя», – М.: «Наука», 1974г. – 654стр.
2. Милович А. Я. «Теория взаимодействия тел и жидкости. 2–е издание, исправленное и дополненное». – Москва :Гос.изд. литературы по строительству и архитектуре, 1955г. – 311 стр.

3. Пуанкаре А. «Теория вихрей», – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000г.– 160 стр.
4. Милович А. Я. «Основы гидромеханики».–М.–Л.: Гос. Энергетич. Изд-во, 1946г.– 157 стр.