

АЛГОРИТМ АВТОМАТИЧНОГО РОЗРАХУНКУ ЧАСТОТ І ФОРМ ПРИ КОЛИВАННЯХ КРИЛА

Вступ

Процес визначення частот і форм при коливаннях крила є досить трудомістким та потребує багато часу. Питання вібрацій частин літака останнім часом набувають все більшого значення. При проектуванні сучасних швидкісних літаків на ці питання доводиться звертати істотну увагу. Досвід показує, що якщо антивібраційні заходи не передбачені при проектуванні літака, то це може призвести до сумних наслідків.

Дослідженням по визначенню вібраційних характеристик крила присвячено багато робіт, одними з яких є роботи [1-4]. Розв'язаними проблемами в цих дослідженнях є розробка математичної моделі розрахунку частот і форм різними методами. Проте не існує алгоритмів для їх автоматичного визначення.

Постановка задачі

Оскільки на сьогоднішній день визначення вібраційних характеристик крила займає провідну роль у проектуванні літака і одночасно з цим вимагає великої трудомісткості та багато часу, то постає питання розробки алгоритму автоматичного обчислення частот і форм при коливаннях крила.

Метою роботи є розробка алгоритму автоматичного обчислення частот і форм при коливаннях крила методом послідовних наближень, де частота основного тону коливань визначається за допомогою формули Релея.

Розв'язок поставленої задачі

Наближеним способом для визначення частот і форм при коливаннях крила є метод послідовних наближень. Обирається цей метод розрахунку, так як він є більш наближеним з методів для обчислення крила довільного перерізу і також часто застосовується не тільки в авіаційних розрахунках, а також в будівельній механіці ракет, розрахунку на міцність деталей машин (лопаток турбіни) і в будівельній механіці корабля. Але однією з головних задач при розрахунку крила на вібрацію цим методом є обчислення цілого ряду визначених і невизначених інтегралів, коли підінтегральні функції звичайно задаються у вигляді таблиць або графіків. У цих випадках необхідно користуватися різними наближеними методами чисельного

інтегрування. Найбільш простим і у той же час, який широко застосовується, є «спосіб трапецій».

Основні параметри, які потрібно задати в алгоритмі для подальшого розрахунку частот і форм при коливаннях крила є:

EI [кг·м²] – жорсткість крила на згин; GI_p [кг·м²] – жорсткість крила на кручення; l [см] – довжина консолі крила; t [см] – довжина хорди крила; x_0 [см] – відстань від центра жорсткості у розглянутому перерізі до передньої кромки крила; ρ [кг·с²/м⁴] – щільність повітря; α – кут атаки; σ [см] – відстань від осі жорсткості до центра тяжіння у розглянутому перерізі; m [кг·с²/м²] – погонна маса крила; I_m [кг·с²] – погонний масовий момент інерції відносно осі жорсткості; C_y – коефіцієнт підйомної сили.

• Форма основного тону коливань розраховується за допомогою наступних формул [2]:

$$\phi_0(y) = \sin(\pi y / 2l); \quad (1)$$

$$f(y) = \left[\operatorname{ch}(1.875y/l) - \cos(1.875y/l) \right] - 0.734 \left[\operatorname{sh}(1.875y/l) - \sin(1.875y/l) \right] \quad (2)$$

де ϕ_0 – форма основного тону коливань кручення, f – форма основного тону згинних коливань. Ці дані потрібні для подальшого використання у методі послідовних наближень для знаходження першого, другого і третього наближень форми (кількість наближень вибирається так, щоб значення останніх двох були приблизно однаковими).

• Частоти обчислюються формулами [2]:

$$p = \sqrt{\frac{\int_0^l GI_p \left(\frac{d\phi}{dy} \right)^2 dy}{\int_0^l I_m \phi^2 dy}} \quad (3)$$

$$zp = \sqrt{\frac{\int_0^l EI \left(\frac{d^2 f}{dy^2} \right)^2 dy}{\int_0^l m f^2 dy}} \quad (4)$$

де p - частота крутних коливань, zp - частота згинних коливань, $\frac{d\phi}{dy}$ і $\frac{df}{dy}$ – похідні функцій форми;

$$sp_1 = \sqrt{\frac{C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4A_1 E_1}}{2A_1}}; \quad (5)$$

$$sp_2 = \sqrt{\frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4A_1E_1}}{2A_1}}, \quad (6)$$

де sp_1 – частота сумісних згинних коливань, sp_2 – частота сумісних крутних коливань, A_1, C_1, E_1 – коефіцієнти:

$$\begin{aligned} A_1 &= c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}; & C_1 &= c_{11}a_{22} + c_{22}a_{11}; \\ E_1 &= a_{11}a_{22}; & a_{11} &= \int_0^l EI \left(\frac{d^2 f}{dy^2} \right)^2 dy; \\ c_{11} &= \int_0^l m f^2 dy; & a_{22} &= \int_0^l GI_p \left(\frac{d\phi}{dy} \right)^2 dy; \\ & & c_{22} &= \int_0^l I_m \phi^2 dy. \end{aligned}$$

- Критична швидкість флатера обчислюються за формулою [2]:

$$V_{kr} = \sqrt{\frac{-M - \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L}}, \quad (7)$$

де L, M, N – це коефіцієнти, які обчислюються наступним чином:

$$\begin{aligned} L &= B_1 C_2 D_2 - D_2^2 A_1; \\ M &= B_1 C_2 D_1 + B_1 C_1 D_2 - B_1^2 E_2 - 2D_1 D_2 A_1; \\ N &= B_1 C_1 D_1 - B_1^2 E_1 - D_1^2 A_1; \end{aligned}$$

де A_1, C_1, E_1 – коефіцієнти обчислені вище, а B_1, D_1, C_2, D_2, E_2 це:

$$\begin{aligned} B_1 &= d_{11}c_{22} + c_{11}d_{22} - c_{12}d_{21} - c_{21}d_{12} & D_1 &= d_{11}a_{22} + a_{11}d_{22} \\ C_2 &= c_{11}b_{22} - b_{12}c_{21} + d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} & D_2 &= d_{11}b_{22} - b_{12}d_{21} \\ E_2 &= a_{11}b_{22} & b_{12} &= -\frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \rho \int_0^l t f \phi dy; \\ & & d_{11} &= \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \rho \int_0^l t f^2 dy; & d_{12} &= -\frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \rho \int_0^l \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) t^2 f \phi dy; \\ & & d_{21} &= \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \rho \int_0^l \left(\frac{x_0}{t} - \frac{1}{4} \right) t^2 f \phi dy; & b_{22} &= -\frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \rho \int_0^l \left(\frac{x_0}{t} - \frac{1}{4} \right) t^2 \phi^2 dy; \end{aligned}$$

$$d_{22} = -\frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \rho \int_0^l \left[\left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) \left(\frac{x_0}{t} - \frac{1}{4} \right) - \frac{\pi}{16 \frac{\partial C_y}{\partial \alpha}} \right] t^3 \phi^2 dy.$$

Таким чином ми знайшли формули, які нам потрібні для подальшого використання в алгоритмі автоматичного визначення частот і форм при коливаннях крила літака. Використовуючи ці формули, складемо алгоритм.

Коротко розглянемо тепер алгоритм для розрахунку першого наближення форми крутих коливань:

1. Вводяться значення початкових параметрів, які описані вище.
2. Наближення форми обчислюється за формулою:

$$\frac{d\phi_n}{dy} = \frac{1}{GI_p} \int_l^y I_m \phi_{n-1} dy; \quad \phi_n = \int_0^y \frac{d\phi_n}{dy} dy;$$

де n - це номер наближення.

3. Все крило ділиться на 10 однакових частин.
4. Розраховуються значення функції ϕ_0 за допомогою формули (1) для кожного перерізу.

$$\phi_0 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot Int\right), \text{ де } Int = (0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1).$$

5. Обчислюється значення $I_m \phi_0$.
6. Визначається $\int I_m \phi_0$ (за допомогою метода трапецій), де $V = I_m \phi_0$ (у вигляді матриці, для кожного перерізу), $VI = \int I_m \phi_0$, $VI_{010} = 0$ (за граничних умов):
7. Отримані значення ділимо на GI_p і тим самим знайдемо матрицю VII.
8. Після ділення отримані дані інтегруємо, і тим самим знаходимо матрицю VIII (так само як і для $\int I_m \phi_0$, тільки за граничних умов перший член матриці дорівнює нулю, $VI_{00} = 0$).
9. Для того щоб отримати на кінці інтервалу одиницю, помножимо всі значення на коефіцієнт A_1 , це дозволяється робити, оскільки він в подальших розрахунках скорочується, де $A_1 = 1/VIII_{010}$.
10. Після множення отримуємо значення форми крутих коливань першого наближення:

$$\phi_1 = VIII \cdot A_1.$$

$$\text{VI} := \begin{bmatrix}
V_{010} + VI_{010} + 2 \cdot (V_{09} + V_{08} + V_{07} + V_{06} + V_{05} + V_{04} + V_{03} + V_{02} + V_{01}) + V_{00} \\
V_{010} + VI_{010} + 2 \cdot (V_{09} + V_{08} + V_{07} + V_{06} + V_{05} + V_{04} + V_{03} + V_{02}) + V_{01} \\
V_{010} + VI_{010} + 2 \cdot (V_{09} + V_{08} + V_{07} + V_{06} + V_{05} + V_{04} + V_{03}) + V_{02} \\
V_{010} + VI_{010} + 2 \cdot (V_{09} + V_{08} + V_{07} + V_{06} + V_{05} + V_{04}) + V_{03} \\
V_{010} + VI_{010} + 2 \cdot (V_{09} + V_{08} + V_{07} + V_{06} + V_{05}) + V_{04} \\
V_{010} + VI_{010} + 2 \cdot (V_{09} + V_{08} + V_{07} + V_{06}) + V_{05} \\
V_{010} + VI_{010} + 2 \cdot (V_{09} + V_{08} + V_{07}) + V_{06} \\
V_{010} + VI_{010} + 2(V_{09} + V_{08}) + V_{07} \\
V_{010} + VI_{010} + V_{09} \cdot 2 + V_{08} \\
V_{010} + V_{09} + VI_{010} \\
0
\end{bmatrix}$$

Наступні наближення розраховуються аналогічно, тільки за частоту основного тону береться частота, отримана при розрахунках попереднього тону.

Для згинних коливань методика розрахунку першого наближення майже аналогічна, тільки наближення форми обчислюється за формулою:

$$\frac{d^2 f_n}{dy^2} = \frac{1}{EI} \int_0^y m f_{n-1} dy; \quad \phi_n = \frac{1}{EI} \int_0^y \frac{d^2 f_n}{dy^2} dy.$$

Таким чином, маючи значення форми коливань, розглянемо тепер алгоритм для автоматичного розрахунку частоти крутих коливань:

1. Після отримання значень форми коливань третього наближення розраховується похідна $\frac{d\phi}{dy}$, так як вона потрібна для визначення частоти. Для цього необхідно матрицю VII (тільки вже для третього наближення) помножити на коефіцієнт B , де:

$$B = A_3 / \left(\frac{1}{20}l\right).$$

2. Потім обчислюються підінтегральні вирази формули (3) (за допомогою метода трапецій).
3. Останнім кроком є визначення частоти крутих коливань за формулою (3).

Для згинних коливань обчислення аналогічне, тільки воно проводиться за формулою (4).

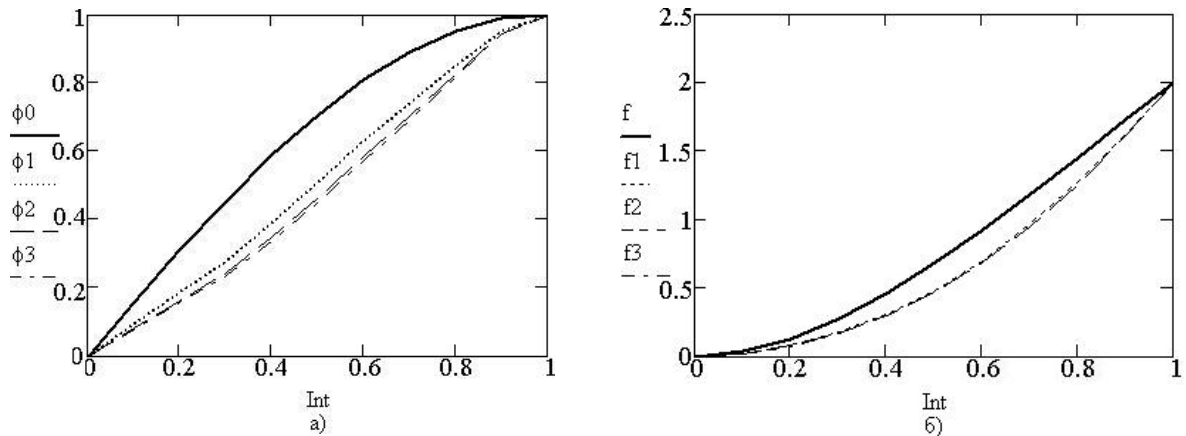


Рис. 1. Залежність форми коливань крила від довжини крила

На рис. 1 представлено: а) – залежність для крутних коливань; б) – залежність для згинних коливань; де ϕ_0 і f – форма коливань основного тону, ϕ_1 і f_1 – форма коливань першого наближення, ϕ_2 і f_2 – форма коливань другого наближення та ϕ_3 і f_3 – форма коливань третього наближення. Як видно з графіків, друге і третє наближення мають майже однакові значення, як і вимагає умова метода послідовних наближень.

Після отримання частот і форм крутних і згинних коливань крила за допомогою отриманих результатів обчислюються сумісні (згинно-крутні) коливання за формулами (5) та (6). Критична швидкість флатера розраховується після обчислень сумісних коливань за формулою (7) при застосуванні даних, які були отримані раніше.

При створенні алгоритму автоматичного обчислення частот і форм при коливаннях крила були вирішені такі задачі:

- Створення програми для автоматичного визначення частот і форм крутних, згинних, згинно-крутних коливань.
- Автоматичне визначення критичної швидкості флатера при згинно-крутних коливаннях.

Приклади застосування отриманих результатів

Запропонований алгоритм автоматичного визначення частот і форм при коливаннях крила в подальшому може використовуватись конструкторами на етапі проектування літака для визначення вібраційних характеристик крила.

Висновки

Отже, за допомогою розробленого алгоритму автоматичного розрахунку частот і форм при коливаннях крила методом послідовних наближень, як результат, повинні скоротитись терміни та трудомісткість визначення вібраційних характеристик крила, оскільки головною задачею є введення початкових параметрів, після чого одразу отримується кінцевий результат. Встановлено, що на основі отриманого алгоритму можна за короткий проміжок часу шляхом зміни параметрів підібрати оптимальні їх значення, при яких можливо вийти на ті частоти, які не попадуть в резонанс.

Список використаної літератури

1. *Бисплингхофф Р. Л.* Аэроупругость /Р. Л. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р. Л. Халфман// – М.: Издательство иностранной литературы, 1958. – 800 с.
2. *Гроссман Е. П.* Курс вибраций частей самолета, 1940. – 315 с.
3. *Мариношенко О. П.* Коливальні процеси при деформуванні крила літального апарату, – Збірник науково-технічної конференції, 2009. – С.95-101.
4. *Matthew P. Snyder* Vibration and Flutter Characteristics of a Folding Wing / P. Snyder Matthew, Sanders Brian, E. Eastep Franklin and J. Frank Geoffrey // JOURNAL OF AIRCRAFT Vol. 46, No. 3, May–June 2009.
5. *Балабух Л. И.* Строительная механика ракет / Л. И. Балабух, Н. А. Алфутов, В. И. Усюкин // М.: Высш. шк. , 1984. – 391 с.
6. *Биргер И. А.* Расчет на прочность деталей машин / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, Г. Б. Иосилевич // – М.: Машиностроение, 1993. — 640 с.
7. *Справочник по строительной механике корабля (под ред. Ю. А. Шиманского).* – Л.: Судпромгиз, 1958. – 528 с.