

## **РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ НАВКОЛО ПОЗДОВЖНЬОЇ ОСІ, З УРАХУВАННЯМ ВІТРУ ТА ЇЇ АНАЛІЗ**

### **Вступ**

Імітаційне моделювання є потужним інструментом, що використовується під час проектування технічних систем, зокрема літальних апаратів (ЛА). Цей інструмент дає можливість отримувати велику кількість даних, які без моделювання можна отримати лише експериментально.

В основі імітаційного моделювання польоту лежить математична модель ЛА. При розрахунку системи керування польотом часто для математичного опису руху ЛА в атмосфері використовують спрощені моделі. Поздовжній і боковий рухи розглядаються ізольовано один від одного.

В деяких осесиметричних безпілотних ЛА (БПЛА), наприклад, артилерійських снарядах, застосовується вимушене обертання навколо поздовжньої осі, що досягається установкою крил під певним кутом  $\varphi_{кр}$  відносно поперечних осей. Такий ЛА набуває властивостей гіроскопічного тіла. Це проявляється у наявності перехресних зв'язків між вертикальним і горизонтальним каналами керування. Саме цими зв'язками нехтують при розділенні руху на поздовжній і боковий. Крім того, зміна швидкісного кута крену в межах від  $-180^\circ$  до  $180^\circ$  пред'являє додаткові вимоги до математичної моделі порівняно з ЛА, значення крену яких лежить в межах від  $-90^\circ$  до  $90^\circ$ .

### **Постановка задачі**

Метою даної роботи є розробка математичної моделі просторового руху ЛА, що під час польоту здійснює повний оберт навколо поздовжньої осі, з урахуванням впливу вітру.

### **Основна частина**

Математична модель просторового руху ЛА являє собою нелінійну систему диференціальних рівнянь. Вони можуть бути отримані з використанням однієї із загальних теорем динаміки [7]. Процедура отримання цих рівнянь з певними припущеннями (без урахування вітру і повного обертання по крену) досить широко розглянута в літературі

([8, дод.1], [4], [6], тому в даній роботі докладно розглянуто основні аспекти, пов'язані з врахуванням вказаних припущень.

Достатньо повна система рівнянь ЛА складається з рівнянь руху центра мас, рівнянь руху відносно центра мас, кінематичних рівнянь, геометричних рівнянь, рівнянь розрахунку модуля і кутів орієнтації вектора повітряної швидкості, рівнянь траєкторного руху, рівнянь розрахунку аеродинамічних сил і моментів, рівнянь зміни маси, рівнянь зміни моментів інерції, рівнянь розрахунку зміни положення центра мас і зміни аеродинамічних коефіцієнтів внаслідок вигорання палива, рівнянь динаміки органів керування, закону керування. В межах даної роботи розглянуто перші 8 груп рівнянь.

Для вибору систем координат і позначень параметрів руху об'єкта використано [3], [4], [6], [8]. У рамках цього розглядаються нормальна земна система координат (СК)  $O_0X_gY_gZ_g$ , нормальна СК  $OX_gY_gZ_g$ , зв'язана СК  $OXYZ$ , швидкісна СК  $OX_aY_aZ_a$ , повітряна СК  $OX_{1a}Y_{1a}Z_{1a}$ , траєкторна СК  $OX_{\kappa}Y_{\kappa}Z_{\kappa}$  (рис. 1 – 4).

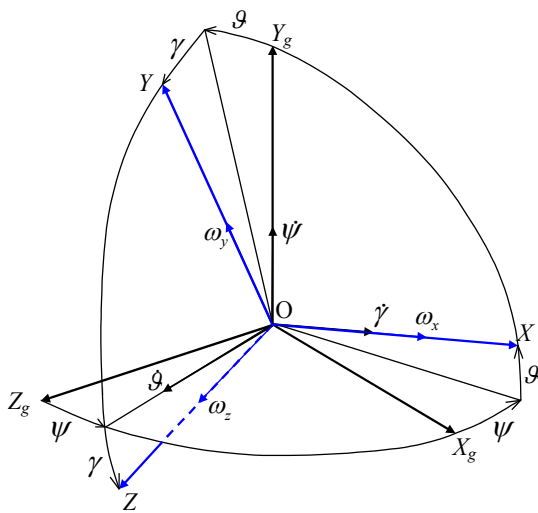


Рис. 1. Перехід від нормальної до зв'язаної СК

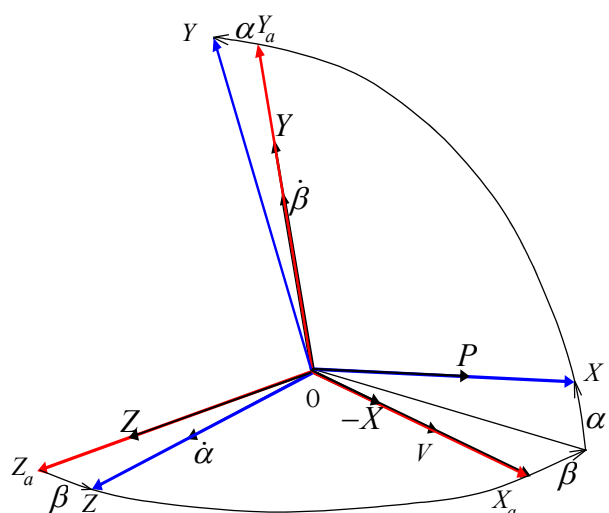


Рис. 2. Перехід від швидкісної до зв'язаної СК

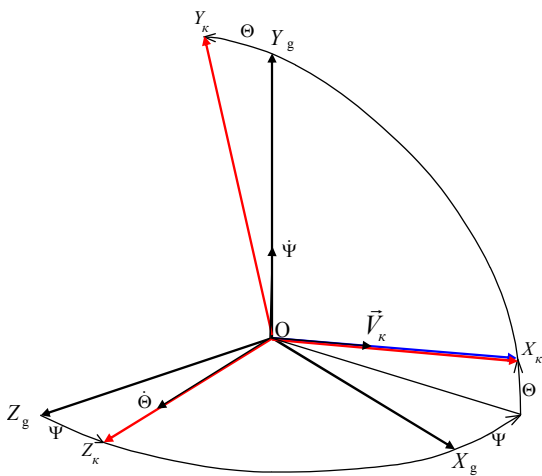


Рис. 3. Перехід від нормальної до траєкторної СК

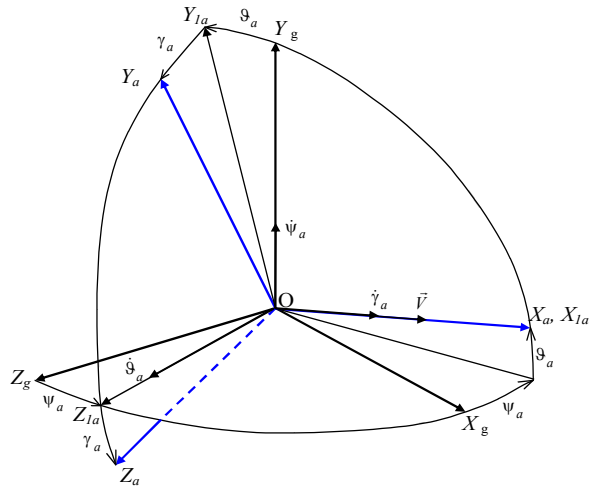


Рис. 4. Перехід від нормальної до швидкісної СК

Перехід від нормальної до зв'язаної СК здійснюється послідовними поворотами на кут ризиання  $\psi$ , тангажу  $\vartheta$ , крену  $\gamma$ . (рис. 1). Аналогічно зв'язана СК повернута відносно швидкісної на кут ковзання  $\beta$  і кут атаки  $\alpha$  (рис. 2). На рис. 2 також зображено сили, що діють на ЛА. Перехід від нормальної до траєкторної СК здійснюється поворотом на шляховий кут  $\Psi$  і кут нахилу траєкторії  $\Theta$  (рис. 3). Швидкісна СК повернута відносно нормальної на швидкісний кут ризиання  $\psi_a$ , тангажу  $\vartheta_a$  і крену  $\gamma_a$ . Цей перехід здійснюється через повітряну СК  $OX_{1a}Y_{1a}Z_{1a}$  (рис. 4). На рис. 4  $\vec{V}$  - це вектор повітряної швидкості руху ЛА (відносно повітряного середовища). В загальному випадку  $\vec{V}$  не збігається з вектором земної швидкості  $\vec{V}_k$  (рис. 3).

Рівняння сил отримуються записуванням закону збереження кількості руху (1) у проєкціях на осі траєкторної СК:

$$m \cdot \dot{V}_k = F_{xk}; \quad m \cdot \dot{V}_k \cdot \dot{\Theta} = F_{yk}; \quad -m \cdot V_k \cdot \dot{\Psi} \cdot \cos \Theta = F_{zk}. \quad (1)$$

Розкриваючи праві частини рівнянь, будемо враховувати силу тяги двигуна  $P$ , силу ваги  $G$  та повну аеродинамічну силу  $R$ , яка складається з підйомної сили  $Y_a$ , сили лобового опору  $Q$ , бокової сили  $Z_a$ .

Аеродинамічні сили визначаються в швидкісній СК  $OX_aY_aZ_a$  і напрямлені по осям цієї системи. Далі визначаються їх проєкції на осі траєкторної СК шляхом послідовних переходів від швидкісної до нормальної і від нормальної до траєкторної. Вектор сили тяги  $P$  збігається з напрямком поздовжньої осі ЛА. Сила ваги  $G$  проєціюється на осі

траєкторної СК через кут нахилу траєкторії  $\Theta$ . Проекції сили тяги на осі траєкторної СК можна отримати, спроеціювати тягу на осі нормальної СК, а потім отримані проекції спроеціювати на осі траєкторної СК.

Методика отримання рівнянь моментів і кінематичних рівнянь описана, зокрема, у [4, ст. 155–157].

**Геометричні рівняння.** Для обчислення кута атаки  $\alpha$ , ковзання  $\beta$  та швидкісного крену  $\gamma_a$ , які необхідні для визначення сил і моментів, що діють на ЛА, використовуються геометричні рівняння. Вони дають залежність вказаних кутів від кутів Ейлера  $\psi$ ,  $\vartheta$  і  $\gamma$ , а також від кутів орієнтації вектора повітряної швидкості відносно нормальної системи координат –  $\psi_a$ ,  $\vartheta_a$ .

З рис. 1 – рис. 4 видно, що перехід від повітряної до зв'язаної СК може бути здійснено двома шляхами: через швидкісну СК  $O X_a Y_a Z_a$  або через нормальну СК. Схематично ці переходи можуть бути зображені наступним чином:

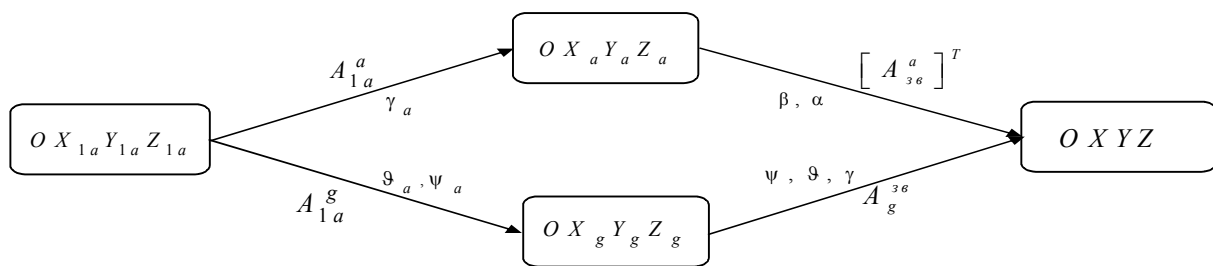


Рис. 5. Перехід від повітряної СК до зв'язаної через швидкісну і нормальну

Оскільки два переходи еквівалентні, то

$$\left[ A_{3\beta}^a \right]^T \cdot A_{1a}^a = A_g^{3\beta} \cdot A_{1a}^g; \quad (2)$$

Перемноживши рівність (2) і прирівнявши відповідні елементи результуючих матриць, отримуємо геометричні рівняння. Згідно з наведеною методикою,  $\alpha \in [-90^\circ; 90^\circ]$ ,  $\beta \in (-90^\circ; 90^\circ)$ ,  $\gamma_a \in [-180^\circ; 180^\circ]$ .

**Рівняння розрахунку модуля і кутів орієнтації вектора повітряної швидкості.** З рис. 6 можна побачити, що якщо знати швидкість руху ЛА відносно землі  $\vec{V}_k$  і швидкість руху повітря відносно землі  $\vec{V}_w$ , то можна знайти проекції швидкості руху ЛА відносно повітря  $\vec{V}$  на осі нормальної СК:

$$V_{xg} = V_{xgk} - V_{xgw}; \quad V_{yg} = V_{ygz} - V_{ygz}; \quad V_{zg} = V_{zgz} - V_{zgz}; \quad (3)$$

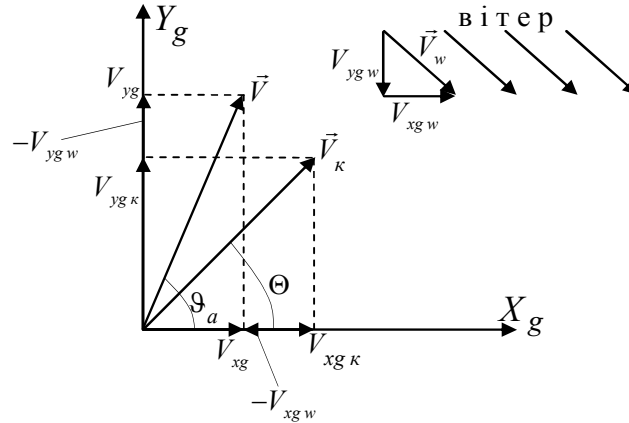


Рис. 6. Відмінність між кутами  $\Theta$  і  $\vartheta_a$  при наявності вітру

За відомими проекціями вектора повітряної швидкості на осі нормальної СК обчислюються модуль і кути орієнтації вектора  $\vec{V}$ .

Рівняння зміни маси при вигоранні палива має вигляд:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m_n}{I_\Sigma} \cdot P, \quad (4)$$

де  $P$  – поточне значення тяги,  $m_n$  – маса палива,  $I_\Sigma$  – сумарний імпульс маршового двигуна (МД).

З урахуванням рівнянь сил, моментів, кінематичних рівнянь, геометричних рівнянь, рівнянь розрахунку модуля та кутів орієнтації вектора повітряної швидкості, рівнянь траєкторного руху та рівняння зміни маси отримана система нелінійних диференціальних рівнянь руху ЛА, що обертається навколо поздовжньої осі:

$$V_{xg} = V_{xgk} - V_{xgw}; \quad V_{zg} = V_{zgk} - V_{zgw}; \quad V_{yg} = V_{ygz} - V_{ygz}; \quad V = \sqrt{V_{xg}^2 + V_{yg}^2 + V_{zg}^2};$$

$$\sin \vartheta_a = \frac{V_{yg}}{V}; \quad \cos \vartheta_a = \frac{\sqrt{V_{xg}^2 + V_{zg}^2}}{V}; \quad \sin \psi_a = -\frac{V_{zg}}{\sqrt{V_{xg}^2 + V_{zg}^2}}; \quad \cos \psi_a = \frac{V_{xg}}{\sqrt{V_{xg}^2 + V_{zg}^2}};$$

$$\sin \beta = \cos \psi_a \cos \vartheta_a (\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \sin \vartheta) - \sin \vartheta_a \sin \gamma \cos \vartheta - \\ - \sin \psi_a \cos \vartheta_a (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma \sin \vartheta);$$

$$\sin \alpha = -\frac{\cos \psi_a \cos \vartheta_a (\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \cos \psi \sin \vartheta) + \sin \vartheta_a \cos \gamma \cos \vartheta}{\cos \beta} - \\ - \frac{\sin \psi_a \cos \vartheta_a (\sin \gamma \cos \psi + \cos \gamma \sin \psi \sin \vartheta)}{\cos \beta};$$

$$\sin \gamma_a = -\frac{-\cos \psi_a \sin \vartheta_a (\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \sin \vartheta) - \cos \vartheta_a \sin \gamma \cos \vartheta}{\cos \beta} +$$

$$+ \frac{\sin \psi_a \sin \vartheta_a (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma \sin \vartheta)}{\cos \beta};$$

$$\cos \gamma_a = \frac{\sin \psi_a (\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \sin \vartheta) + \cos \psi_a (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma \sin \vartheta)}{\cos \beta};$$

$$m\dot{V}_\kappa = P \cdot [\cos \Theta \cos \vartheta \cdot (\cos \Psi \cos \psi + \sin \Psi \sin \psi) + \sin \Theta \sin \vartheta] - G \sin \Theta -$$

$$- Q(\cos \Psi \cos \Theta \cos \vartheta_a \cos \psi_a + \sin \Theta \sin \vartheta_a + \sin \Psi \cos \Theta \sin \psi_a \cos \vartheta_a) +$$

$$+ Y_a (\cos \Psi \cos \Theta (\sin \psi_a \sin \gamma_a - \cos \psi_a \cos \gamma_a \sin \vartheta_a) + \sin \Theta \cos \vartheta_a \cos \gamma_a -$$

$$- \sin \Psi \cos \Theta (\cos \psi_a \sin \gamma_a + \sin \psi_a \cos \gamma_a \sin \vartheta_a)) +$$

$$+ Z_a (\cos \Psi \cos \Theta (\sin \psi_a \cos \gamma_a + \cos \psi_a \sin \gamma_a \sin \vartheta_a) - \sin \Theta \cos \vartheta_a \sin \gamma_a$$

$$- \sin \Psi \cos \Theta (\cos \psi_a \cos \gamma_a - \sin \psi_a \sin \gamma_a \sin \vartheta_a));$$

$$mV_\kappa \dot{\Theta} = P \cdot [\cos \Theta \sin \vartheta - \sin \Theta \cos \vartheta \cdot (\cos \Psi \cos \psi + \sin \Psi \sin \psi)] - G \cos \Theta +$$

$$+ Q(\cos \Psi \sin \Theta \cos \psi_a \cos \vartheta_a - \cos \Theta \sin \vartheta_a + \sin \Psi \sin \Theta \sin \psi_a \cos \vartheta_a) +$$

$$+ Y_a (-\cos \Psi \sin \Theta (\sin \psi_a \sin \gamma_a - \cos \psi_a \cos \gamma_a \sin \vartheta_a) + \sin \Theta \cos \vartheta_a \cos \gamma_a +$$

$$+ \sin \Psi \sin \Theta (\cos \psi_a \sin \gamma_a + \sin \psi_a \cos \gamma_a \sin \vartheta_a)) +$$

$$+ Z_a (-\cos \Psi \sin \Theta (\sin \psi_a \cos \gamma_a + \cos \psi_a \sin \gamma_a \sin \vartheta_a) - \cos \Theta \cos \vartheta_a \sin \gamma_a +$$

$$+ \sin \Psi \sin \Theta (\cos \psi_a \cos \gamma_a - \sin \psi_a \sin \gamma_a \sin \vartheta_a));$$

$$-mV_\kappa \dot{\Psi} \cos \Theta = P \cdot \cos \vartheta \cdot [\sin \Psi \cos \psi - \cos \Psi \sin \psi] - Q(\sin \Psi \cos \psi_a \cos \vartheta_a -$$

$$- \cos \Psi \sin \psi_a \cos \vartheta_a) + Y_a (\sin \Psi (\sin \psi_a \sin \gamma_a - \cos \psi_a \cos \gamma_a \sin \vartheta_a) +$$

$$+ \cos \Psi (\cos \psi_a \sin \gamma_a + \sin \psi_a \cos \gamma_a \sin \vartheta_a)) + Z_a (\sin \Psi (\sin \psi_a \cos \gamma_a +$$

$$+ \cos \psi_a \sin \gamma_a \sin \vartheta_a) + \cos \Psi (\cos \psi_a \cos \gamma_a - \sin \psi_a \sin \gamma_a \sin \vartheta_a));$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m_n}{I_\Sigma} \cdot P;$$

$$J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_z \omega_y = M_x; \quad J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z = M_y;$$

$$J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_y \omega_x = M_z;$$

$$\dot{\psi} = \sec \vartheta \cdot (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma); \quad \dot{\vartheta} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma;$$

$$\dot{\gamma} = \omega_x + \operatorname{tg} \vartheta \cdot (\omega_z \sin \gamma - \omega_y \cos \gamma);$$

$$\dot{X}_g = V_\kappa \cos \Theta \cos \Psi; \quad \dot{Y}_g = \dot{H} = V_\kappa \sin \Theta; \quad \dot{Z}_g = -V_\kappa \cos \Theta \sin \Psi.$$

Залежність аеродинамічних сил і моментів, що входять до правих частин рівнянь сил і моментів, від параметрів руху досить широко висвітлена в літературі, наприклад у [6]. Для замкнутості системи рівнянь потрібно додати рівняння, що описують рух органів керування або прирівняти їх до нуля, щоб дослідити балістичний політ.

Отримана система рівнянь використана при створенні імітаційної моделі БПЛА типу ракети нормальної схеми. Результати моделювання при  $\vartheta_0 = \Theta_0 = 45^\circ$  показані на рис. 7 – рис. 16. При цьому з 8 по 12 с працює МД.

На рис. 7 – рис. 10 показано графіки зміни параметрів некерованого польоту в часі при відсутності вітру для різних значень кутової швидкості крену. На рис. 11 та рис. 12 показано графіки  $z(t)$  і  $\psi(t)$  при відсутності  $\omega_x$  і дії постійного бокового вітру ( $\psi_0=90^\circ$ ) зі швидкістю  $V_w$  від 0 до 25 м/с. На рис. 13 та рис. 14 показано зміну бокової координати і кута рискання при наявності кутової швидкості крену, що відповідає куту  $\varphi_{кр}=2^\circ$  (рис. 8), і дії постійного бокового вітру ( $\psi_0=90^\circ$ ) зі швидкістю  $V_w$  від 0 до 25 м/с.

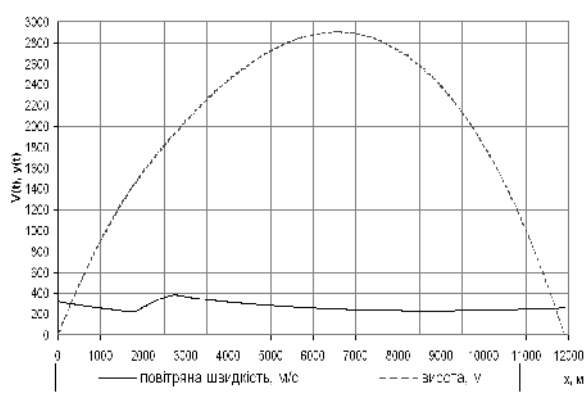


Рис. 7. Профіль траєкторії у вертикальній площині і повітряна швидкість

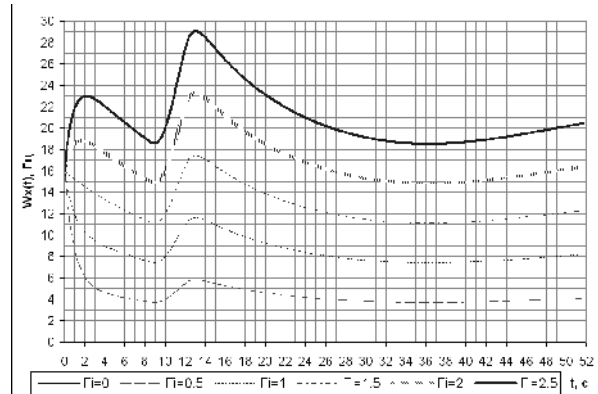


Рис. 8. Графіки зміни  $\omega_x(t)$  при зміні кута установки крила від  $0$  до  $2,5^\circ$

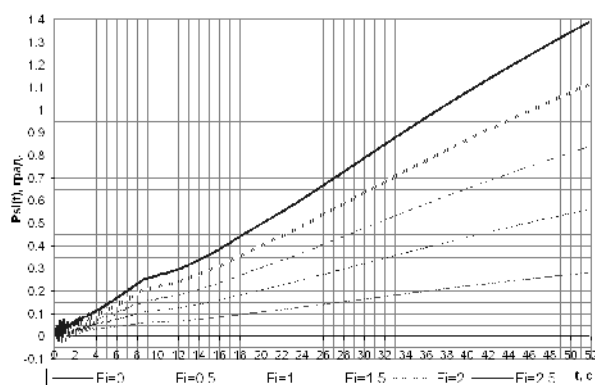


Рис. 9. Графіки  $\psi(t)$  при  $\varphi_{кр} \in [0; 2,5]^\circ$

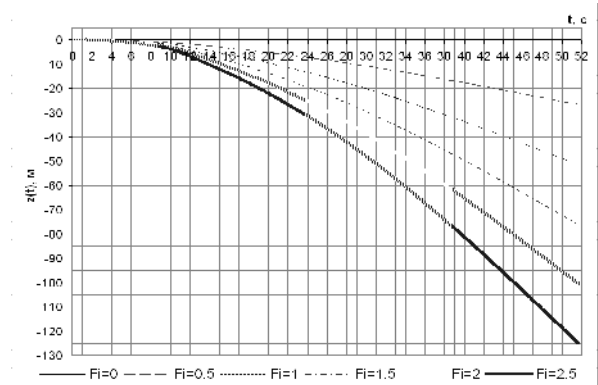


Рис. 10. Графіки  $z(t)$  при  $\varphi_{кр} \in [0; 2,5]^\circ$

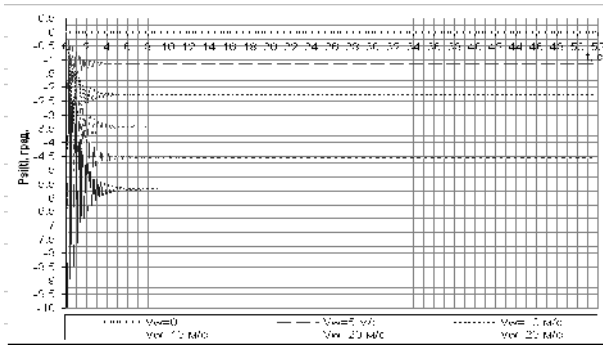


Рис. 11.  $\psi(t)$  при  $\omega_x(t)=0$  і  $V_w \in [0; 25]$  м/с

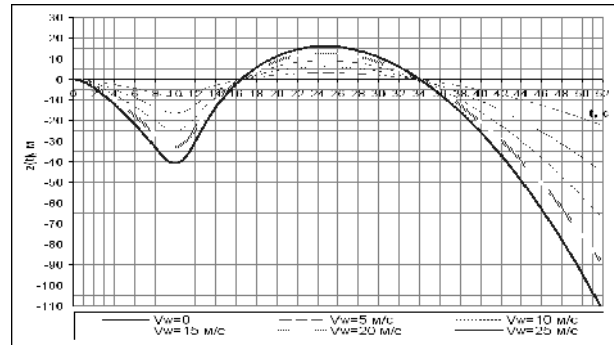


Рис. 12.  $z(t)$  при  $\omega_x(t)=0$  і  $V_w \in [0; 25]$  м/с

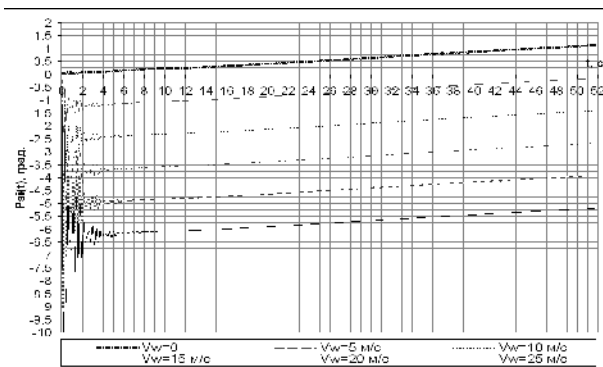


Рис. 13.  $\psi(t)$  при  $\phi_{kp}=2^\circ$  і  $V_w \in [0; 25]$  м/с

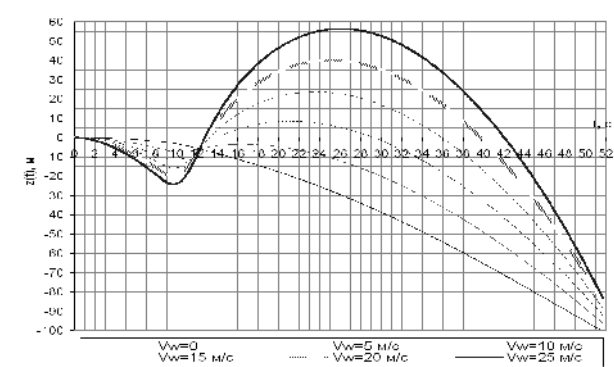


Рис. 14.  $z(t)$  при  $\phi_{kp}=2^\circ$  і  $V_w \in [0; 25]$  м/с

Розроблена математична модель дозволяє врахувати перехресні зв'язки між горизонтальним і вертикальним каналами, що зумовлені кутовою швидкістю крену. На рис. 15 показано графіки зміни кутів тангажу і рискання. Зміна кутової швидкості крену відповідає  $\phi_{kp}=2^\circ$  (рис. 8). Початковий кут тангажу і нахилу траєкторії становлять  $5^\circ$ . При  $t=2,5$  с подається стрибок проекції відхилення рулів у вертикальному каналі на  $15^\circ$ , а при  $t=7$  с подається стрибок проекції відхилення рулів у горизонтальному каналі на  $-15^\circ$ . Як видно з рис. 15, відхилення рулів у вертикальному каналі спричинює збурення у горизонтальному каналі і навпаки.

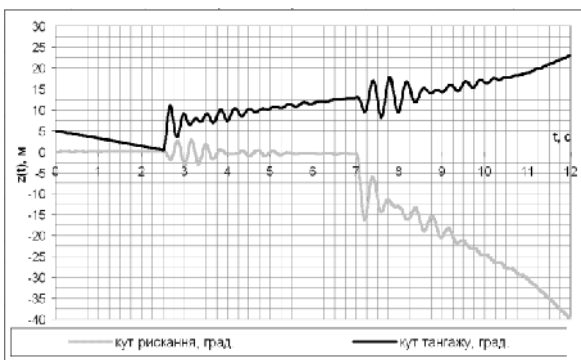


Рис. 15. Кути тангажу і рискання при стрибкоподібному відхиленні

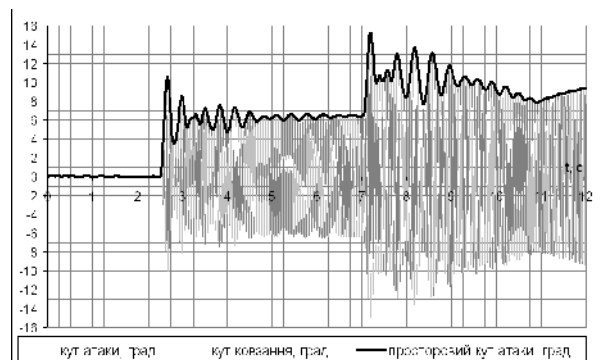


Рис. 16. Кути атаки, ковзання і просторовий кут атаки



### Висновки

1. При русі ЛА, що обертається по крену, по балістичній траєкторії виникає наростання в часі кута рискання зі швидкістю, пропорційною  $\omega_x$ .
2. При дії бокового вітру на ЛА, що не обертається по крену, відбувається розворот ЛА проти вітру на кут, пропорційний швидкості вітру.
3. При обертанні ЛА навколо поздовжньої осі можна підібрати такий момент запуску МД, що величина бокового зносу не залежить від величини вітру.
4. При подачі стрибка відхилення рулів у вертикальний канал відбувається реакція у горизонтальному каналі і навпаки.
5. Розроблена математична модель може використовуватися для оцінки адекватності спрощених моделей і для перевірки якості регуляторів, розрахованих за допомогою спрощених лінійних моделей.

### Список використаної літератури

1. *Александров Є. Є., Козлов Е. П., Кузнецов, Б. І., за заг. ред. Александрова Є. Є.* Автоматичне керування рухом літальних апаратів. – Х.: НТУ «ХПІ», 2006, 528 с. (ст. 195–203).
2. *Богословский С. В., Дорофеев А. Д.* Динамика полета летательных аппаратов. – СПб.: ГУАП, 2002, 63 с. (ст. 5–10).
3. ГОСТ 20058–80 Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения.
4. *Горбатенко С. А., Макашов Э. М.* и др. Механика полета. Справочник. – М.: Машиностроение, 1978, 419 с. (ст. 154–193).
5. *Казак В. М., Лейва Каналес Родриго, Яковицкая Е. Ю.* Моделирование динамики полета магистрального самолета на исследовательском стенде. ААЭКС, №1(23), 2009, 317 с.
6. *Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1973, 548 с. (ст. 72–123).
7. *Павловський М. А.* Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002, 510 с.
8. *Синєглазов В. М., Філяшкін М. К.* Автоматичні системи управління повітряних суден. – підручник для авіаційних вузів. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005, 183 с., Додаток 1.
9. *Gorecki R. M.* A Baseline 6 Degree of Freedom Mathematical Model of a Generic Missile. – Edinburgh.: DSTO Systems Science Laboratory, 2003. 231 p.

