УДК 531.13

В. Г. Савин, И. О. Моргун

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ СФЕРИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Введение

В настоящее время широкое применение в различных отраслях техники находят электроупругие преобразователи энергии с тонкостенными активными элементами.

Практическое использование этих преобразователей в технике достаточно широко отражено в справочной литературе. Например, в работе [1] приведена область их применения и даны основные особенности конструктивного исполнения. В работе [2] указаны особенности расчета, проектирования и конструирования основных типов пьезокерамических преобразователей, используемых в гидроакустике. Следует отметить, что в этой работе наряду с инженерными подходами: теорией эквивалентных схем и теорией четырехполюсников, приведен более строгий аналитический подход с привлечением одномерных и двухмерных уравнений теории тонких цилиндрических пьезокерамических оболочек.

В свою очередь, анализ публикаций по этой тематике показывает, что отсутствие работ, в которых описаны электроупругие колебания (в том числе и трехмерные) тонкостенных преобразователей других форм, сдерживает внедрение современных аналитических подходов в расчетную практику проектных организаций соответствующего профиля. В данной работе частично удается восполнить этот пробел, описав динамическое поведение трехмерных колебаний пьезокерамических сферических и цилиндрических оболочек.

Вывод уравнений колебаний

Для описания движения тонкостенных элементов конструкций, у которых толщина мала по сравнению с геометрическими размерами, используются различные прикладные теории. Один из путей их построения состоит в принятии гипотез, учитывающих специфику объекта и позволяющих существенно упростить математическое описание процесса деформирования. Среди большого числа имеющихся теорий сравнительно простой и достаточно эффективной является линейная теория тонких упругих оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа-Лява (недеформируемых нормалей), на которые в дальнейшем будем опираться. Эти гипотезы формулируются следующим образом:

а) прямолинейный элемент оболочки, перпендикулярный его срединной поверхности, после деформации остается нерастяжимым, а также прямолинейным и перпендикулярным к деформированной срединной поверхности;

б) нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной поверхности, можно пренебречь.

Отнесем срединную поверхность оболочки к ортогональным криволинейным координатам α_1, α_2, считая их совпадающими с направлениями главных кривизн. Третью пространственную координату α_3 направим вдоль внешней нормали к линиям $\alpha_1 = const$, $\alpha_2 = const$. В дальнейшем, желая сохранить наиболее употребляемые в теории оболочек обозначения, примем $\alpha_3 = r$.

Пусть геометрические свойства срединной поверхности характеризуются радиусами кривизны R_1, R_2 и коэффициентами первой квадратичной формы (коэффициенты Ламэ) A_1, A_2. Обозначим через u, v, w компоненты вектора перемещений точки, лежащей в срединной поверхности оболочки. Так называется поверхность, равноотстоящая от двух лицевых поверхностей, которая делит толщину оболочки пополам ($-\frac{h}{2} \le r \le \frac{h}{2}$, где h – толщина оболочки). Тогда, с учетом принятых гипотез, перемещения точек, удаленных от срединной поверхности на расстояние r, выражаются через u_1, u_2, u_3 (рис. 1) следующим образом [3]:

$$u_1 = \left(1 + \frac{r}{R_1}\right) u - \frac{r}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1};$$

$$u_2 = \left(1 + \frac{r}{R_2}\right) v - \frac{r}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2};$$

$$u_3 = w.$$

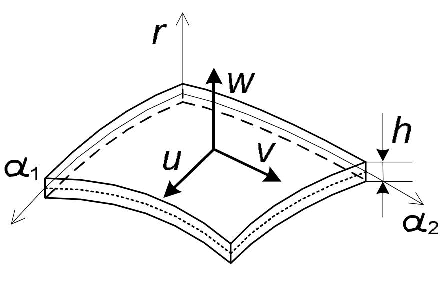

Рис. 1. Элемент пьезокерамической оболочки

Линеаризированные по r геометрические соотношения для компонент тензора деформаций имеют вид [3]:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + r\chi_1;$$
$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + r\chi_2;$$
$$\varepsilon_{12} = \omega + r\tau;$$
$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0;$$
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}v + \frac{w}{R_1};$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u + \frac{w}{R_2};$$
$$\omega = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{u}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{v}{A_2}\right);$$
$$\chi_1 = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} - \frac{u}{R_1}\right) - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2} - \frac{v}{R_2}\right);$$
$$\chi_2 = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2} - \frac{v}{R_2}\right) - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} - \frac{u}{R_1}\right);$$
$$\tau = \left[\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{u}{A_1R_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{v}{A_2R_2}\right)\right] -$$
$$-2\left[\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right)\right], \qquad (1)$$

где ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, ε_{12}, ε_{13}, ε_{23} – компоненты тензора механических деформаций;

ε_1, ε_2, ω – относительные изменения размеров малого элемента срединной поверхности по соответствующей координате;

χ_1, χ_2, τ– деформации изгиба и скручивания.

Величины ε_1, ε_2 и ω характеризуют равномерную по толщине деформацию оболочки, вызванную растяжением и сдвигом срединной поверхности, а χ_1, χ_2 и τ определяют линейное изменение ε_{11}, ε_{22} и ε_{12} по толщине, обусловленное изгибом и скручиванием срединной поверхности.

Запишем уравнения пьезоэффекта [4] с учетом принятых гипотез для оболочки вращения в случае радиальной поляризации:

$$\sigma_{\alpha_1} = C_{11}^E\varepsilon_{11} + C_{12}^E\varepsilon_{22} - e_{31}E_r;$$
$$\sigma_{\alpha_2} = C_{12}^E\varepsilon_{11} + C_{11}^E\varepsilon_{22} - e_{31}E_r;$$
$$\tau_{\alpha_1\alpha_2} = \frac{1}{2}\left(C_{11}^E - C_{12}^E\right)\varepsilon_{12};$$
$$D_{\alpha_1} = \varepsilon_{11}^s E_{\alpha_1}; \qquad (2)$$

$$D_{\alpha_2} = \varepsilon_{11}^{s} E_{\alpha_2};$$

$$D_r = \varepsilon_{33}^{s} E_r + e_{31}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right),$$

где σ_{α_1}, σ_{α_2}, $\tau_{\alpha_1\alpha_2}$ – компоненты механических напряжений;

C_{11}^{E}, C_{12}^{E} – модули упругости пьезокерамики;

e_{31} – пьезомудуль керамики;

ε_{11}^{s}, ε_{33}^{s} – диэлектрическая проницаемость пьезокерамики;

E_{α_1}, E_{α_2}, E_r, D_{α_1}, D_{α_2}, D_r – составляющие векторов напряженности и индукции электрического поля.

Для нормальных составляющих векторов напряженности и индукции электрического поля принимаются приближенные равенства [4]

$$E_r = E_r^{(0)} + rE_r^{(1)};$$

$$D_r = const, \tag{3}$$

тогда из выражений (1) и (2) следует, что

$$E_r^{(1)} = -\frac{e_{31}}{\varepsilon_{11}^{s}}\left(\chi_1 + \chi_2\right), \tag{4}$$

где $E_r^{(0)}$ – электрическая напряженность в срединной поверхности преобразователя;

$E_r^{(1)}$ – величина, описывающая линейный характер распределения электрической напряженности по толщине оболочки.

В классической теории пластин и оболочек рассматривается равновесие бесконечно малого в плоскости упругого элемента, который, однако, имеет конечную толщину. Для такого элемента в уравнениях его равновесия должны входить не сами напряжения по толщине, а их интегральные по толщине элемента характеристики. В качестве таких характеристик выбирают тангенциальные усилия T_1, T_2, S, а также изгибающие M_1, M_2 и крутящий H моменты. Для тонких пластин и оболочек эти интегральные характеристики вычисляются по формулам, приведенным, например, в работе [5].

Для пьезокерамических оболочек эти интегральные характеристики выбираются аналогичным образом:

$$T_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha_1} dr; \qquad T_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha_2} dr;$$

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha_1} r dr; \qquad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha_2} r dr;$$

$$S = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha_1\alpha_2} dr; \qquad H = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha_1\alpha_2} r dr. \tag{5}$$

Следуя работе [3], уравнения равновесия в усилиях и моментах принимают вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\left(A_2T_1\right)}{\partial\alpha_1}+\dfrac{\partial\left(A_1S\right)}{\partial\alpha_2}+\dfrac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}S+-\dfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_2\dfrac{A_1A_2}{R_1}N_1+A_1A_2q_{\alpha_1}=0,\\ \dfrac{\partial\left(A_2S\right)}{\partial\alpha_1}+\dfrac{\partial\left(A_1T_2\right)}{\partial\alpha_2}+\dfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}S-\dfrac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}T_1+\dfrac{A_1A_2}{R_2}N_2+A_1A_2q_{\alpha_2}=0,\\ \dfrac{\partial\left(A_2N_1\right)}{\partial\alpha_1}+\dfrac{\partial\left(A_1N_2\right)}{\partial\alpha_2}-A_1A_2\left(\dfrac{T_1}{R_1}+\dfrac{T_2}{R_2}\right)+A_1A_2q_r=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\left(A_2H\right)}{\partial\alpha_1}+\dfrac{\partial\left(A_1M_2\right)}{\partial\alpha_2}+\dfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}H-\dfrac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_1-A_1A_2N_2=0,\\ \dfrac{\partial\left(A_2M_1\right)}{\partial\alpha_1}+\dfrac{\partial\left(A_1H\right)}{\partial\alpha_2}+\dfrac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}H-\dfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_2-A_1A_2N_1=0,\end{cases} \qquad (6)$$

где $N_1,\ N_2$ – перерезывающие усилия;

q_{α_1}, q_{α_2}, q_r – составляющие вектора действующих внешних нагрузок.

Из второй системы уравнений (6) находим, что

$$N_1=\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2M_1\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1H\right)}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}H-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_2\right];$$

$$N_2=\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2H\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1M_2\right)}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}H-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_1\right].$$

Усилия и моменты с учетом выражений (2) – (5) выражаются посредством формул:

$$\begin{aligned}&T_1=h\left(C_{11}^E\varepsilon_1+C_{12}^E\varepsilon_2-e_{31}E_r^{(0)}\right);\\ &T_2=h\left(C_{12}^E\varepsilon_1+C_{11}^E\varepsilon_2-e_{31}E_r^{(0)}\right);\\ &M_1=\frac{h^3}{12}\left[\left(C_{11}^E+\frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}^s}\right)\chi_1+\left(C_{12}^E+\frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}^s}\chi_2\right)\right];\\ &M_2=\frac{h^3}{12}\left[\left(C_{12}^E+\frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}^s}\right)\chi_1+\left(C_{11}^E+\frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}^s}\chi_2\right)\right];\\ &S=\frac{1}{2}\left(C_{11}^E-C_{12}^E\right)h\omega;\\ &H=\frac{\left(C_{11}^E-C_{12}^E\right)h^3}{12}\tau.\end{aligned} \qquad (7)$$

Уравнения движения оболочки в перемещениях u, v, w, которые являются исходными при решении динамических задач гидроэлектроупругости, можно получить в соответствии с принципом Д'Аламбера [6], добавляя инерционные члены в уравнения равновесия (6) с последующей подстановкой в эти уравнения выражений (7) и (1). С учетом того, что радиусы кривизны для сферической оболочки принимают значения $R_1 = R_2 = R$, а для цилиндрической $R_1 = R$; $R_2 = \infty$, уравнения движения в сферических и цилиндрических координатах имеют вид:

$$uD_1^{(1)} + vD_2^{(1)} + wD_3^{(1)} = \frac{R^2}{C_{11}^E}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{R^2}{C_{11}^E h}q_{\alpha_1} + \frac{e_{31}}{C_{11}^E}R\frac{\partial E_r^{(0)}}{\partial\alpha_1};$$

$$uD_1^{(2)} + vD_2^{(2)} + wD_3^{(2)} = \frac{R^2}{C_{11}^E}\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{R^2}{C_{11}^E h}q_{\alpha_2} + \frac{e_{31}}{C_{11}^E}R\frac{1}{\sin\alpha_1}\frac{\partial E_r^{(0)}}{\partial\alpha_2};$$

$$uD_1^{(3)} + vD_2^{(3)} + wD_3^{(3)} = \frac{R^2}{C_{11}^E}\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{R^2}{C_{11}^E h}q_r - \vartheta\frac{e_{31}}{C_{11}^E}RE_r^{(0)}, \qquad (8)$$

где $D_i^{(j)}$ – дифференциальные операторы;

R – радиус оболочки;

ρ – плотность пьезокерамики.

Нижние индексы α_1, α_2 в системе уравнений (8) принимают значения θ, ϕ – в случае сферической оболочки и θ, z – в случае цилиндрической оболочки, соответственно.

Для сферической электроупругой оболочки с учетом того, что коэффициенты Ламэ принимают значения $A_1 = R$; $A_2 = R\sin\theta$ [7], дифференциальные операторы имеют вид:

$$D_1^{(1)} = \left[1+\varepsilon(1+\chi)\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\theta}ctg\theta - \left(ctg^2\theta + \xi\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\frac{3}{2}(1-\xi)\left(ctg^2\theta + 1\right);$$

$$D_2^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{ctg\theta}{\sin\theta}\left[(1-\xi)\left(\frac{3}{2}+2\varepsilon\right)+\xi+\varepsilon(\xi+\chi)\right] + \frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\left[(1-\xi)\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)+\right.$$
$$\left.+\xi+\varepsilon(\xi+\chi)\right];$$

$$D_3^{(1)} = -\varepsilon(1+\chi)\left[\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} + ctg\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \left(\xi + ctg^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\right] + (1+\xi)\frac{\partial}{\partial\theta} +$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\varepsilon\frac{ctg\theta}{\sin^2\theta}\left[3(1-\xi)+2(\xi+\chi)\right] - \frac{\partial^3}{\partial\theta\partial\phi^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\varepsilon\left[2(1-\xi)+(\xi+\chi)\right];$$

$$D_1^{(2)} = \frac{\partial}{\partial\phi}\frac{ctg\theta}{\sin\theta}\left[(1-\xi)\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)+1+\varepsilon(1+\chi)\right] + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}\left[\frac{1}{2}(1+\xi)+\varepsilon(1+\chi)\right];$$

$$D_2^{(2)}=\left(1-\xi\right)\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+ctg\frac{\partial}{\partial\theta}+\left(1-ctg^2\theta\right)\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\left[1+\varepsilon\left(1+\chi\right)\right];$$

$$D_3^{(2)}=\frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(1-\xi\right)2\varepsilon\left(\sin^2\theta-2+ctg^2\theta\sin^2\theta\right)+1+\xi\right]-\varepsilon\left(1+\chi\right)\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^3}{\partial\phi^3}-\right.$$

$$\left.-ctg\varepsilon\left(1+\chi\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}-\frac{\partial^3}{\partial\theta^2\partial\phi}\left[\left(1-\xi\right)\varepsilon 2+\xi+\chi\right]\right\};$$

$$D_1^{(3)}=\varepsilon\left(1+\chi\right)\left[\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}+2ctg\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\left(1+\xi+ctg^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial\theta}+\left(2-\xi+ctg^2\theta\right)ctg\theta\right]-$$

$$-\left(1+\xi\right)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}+ctg\theta\right]+\varepsilon\frac{ctg\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\left(1+\chi\right)+$$

$$+\frac{\partial^3}{\partial\phi^2\partial\theta}\frac{1}{\sin^2\theta}\left[\varepsilon\left(\xi+\chi\right)+2\varepsilon\left(1-\xi\right)\right];$$

$$D_2^{(3)}=\frac{1}{\sin\theta}\left\{\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(1-\xi\right)\left(3-ctg^2\theta\right)+\left(\xi+\chi\right)\left(ctg^2\theta\cos^2\theta-1-\cos^2\theta\right)\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^3}{\partial\phi^3}\frac{1}{\sin^2\theta}\left(1+\chi\right)\right]-\left(1+\xi\right)\frac{\partial}{\partial\phi}+\varepsilon\left[\frac{\partial^3}{\partial\phi\partial\theta^2}\left(3-2\xi\right)-\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}ctg\theta\right]\right\};$$

$$D_3^{(3)}=-\varepsilon\left(1+\chi\right)\left[\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}+2ctg\theta\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}-\left(1+\xi+ctg^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\left(2-\xi+ctg^2\theta\right)ctg\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right]-$$

$$-2\left(1+\xi\right)-\frac{\partial^4}{\partial\phi^4}\frac{1}{\sin^4\theta}\varepsilon\left(1+\chi\right)+\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\left[ctg^2\theta\left(1+2\chi+\xi\right)+2ctg^4\theta\left(1+\chi\right)-\right.$$

$$\left.-\left(1-\xi\right)+\frac{2\left(1+\cos^2\theta\right)}{\sin^4\theta}\left(\xi-\chi-2\right)\right]-\varepsilon\frac{1}{\sin^2\theta}\left[\frac{\partial^4}{\partial\phi^2\partial\theta^2}2\left(\chi+2-\xi\right)+\right.$$

$$\left.+ctg\theta\frac{\partial^3}{\partial\phi^2\partial\theta}\left(5\xi+\chi-4\right)\right];$$

$$\vartheta=2;\qquad \varepsilon=\frac{h^2}{12R^2};\quad \chi=\frac{e_{31}^2}{C_{11}^E\varepsilon_{33}^s};\quad \xi=\frac{C_{12}^E}{C_{11}^E};$$

для цилиндрической электроупругой оболочки, для которой коэффициенты Ламэ принимают значения $A_1=R;\ A_2=1$ [7], дифференциальные операторы имеют вид:

$$D_1^{(1)}=\left[1+\varepsilon\left(1+\chi\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+R^2\left(1-\xi\right)\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$D_2^{(1)}=\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}\left(1+\xi\right)\frac{R}{2};$$

$$D_3^{(1)} = \frac{\partial}{\partial\theta} - \varepsilon(1+\chi)\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} - \frac{h^2}{12}(1+\chi)\frac{\partial^3}{\partial\theta\partial z^2};$$

$$D_1^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}(1+\xi)\frac{R}{2};$$

$$D_2^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{1}{2}(1-\xi) + R^2\frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$D_3^{(2)} = \xi R\frac{\partial}{\partial z};$$

$$D_1^{(3)} = -\frac{\partial}{\partial\theta} + \varepsilon(1+\chi)\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} + \frac{h^2}{12}(2-\xi+\chi)\frac{\partial^3}{\partial\theta\partial z^2};$$

$$D_2^{(3)} = -\xi R\frac{\partial}{\partial z};$$

$$D_3^{(3)} = -1 - \varepsilon(1+\chi)\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} - \frac{h^2}{6}(1+\chi)\frac{\partial^4}{\partial\theta^2\partial z^2} - \frac{h^2R^2}{12}(1+\chi)\frac{\partial^4}{\partial z^4};$$

$$\vartheta = 1.$$

Следует отметить, что в случае, когда оболочка контактирует с акустической средой (идеально сжимаемая жидкость), для составляющих вектора действующих внешних нагрузок в уравнениях (8) необходимо положить $q_{\alpha_1} = q_{\alpha_2} = 0$, а $q_r = -p$, где p – акустическое давление в месте контакта оболочки со средой.

Для частных случаев, когда рассматриваются колебания бесконечной по высоте цилиндрической оболочки или в случае осесимметричных колебаний сферической оболочки ($v = 0$), уравнения движения запишутся следующим образом:

$$D_1 u + D_2 w = \frac{R^2}{C_{11}^E}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{R^2}{C_{11}^E h}q_{\alpha_1} + \frac{e_{31}}{C_{11}^E}R\frac{\partial E_r^{(0)}}{\partial\theta};$$

$$D_3 u + D_4 w = \frac{R^2}{C_{11}^E}\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{R^2}{C_{11}^E h}q_r - \vartheta\frac{e_{31}}{C_{11}^E}RE_r^{(0)}.$$

Для сферической электроупругой оболочки дифференциальные операторы имеют вид:

$$D_1 = (1+\varepsilon)\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{ctg}\,\theta - \left(\mathrm{ctg}^2\,\theta + \xi\right)\right];$$

$$D_2 = -\varepsilon\left[\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\mathrm{ctg}\,\theta - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{ctg}^2\,\theta + \xi\right)\right] + (1+\xi)\frac{\partial}{\partial\theta};$$

$$D_3 = \varepsilon\left[\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} + 2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\operatorname{ctg}\theta - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(1+\operatorname{ctg}^2\theta+\xi\right) + \left(2+\operatorname{ctg}^2\theta-\xi\right)\operatorname{ctg}\theta\right] -$$

$$-\left(1+\xi\right)\left[\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\right];$$

$$D_4 = -\varepsilon\left[\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} + 2\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\operatorname{ctg}\theta - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(1+\operatorname{ctg}^2\theta+\xi\right) + \left(2+\operatorname{ctg}^2\theta-\xi\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta\right]$$

$$-2\left(1+\xi\right);$$

$$\vartheta = 2;$$

для цилиндрической электроупругой оболочки дифференциальные операторы имеют вид:

$$D_1 = \left[1+\varepsilon\left(1+\chi\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial\theta^2};$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial\theta} - \varepsilon\left(1+\chi\right)\frac{\partial^3}{\partial\theta^3};$$

$$D_3 = -\frac{\partial}{\partial\theta} + \varepsilon\left(1+\chi\right)\frac{\partial^3}{\partial\theta^3};$$

$$D_4 = -1 - \varepsilon\left(1+\chi\right)\frac{\partial^4}{\partial\theta^4};$$

$$\vartheta = 1.$$

В одномерном случае (пульсирующие колебания) уравнения движения оболочки описываются только радиальным перемещением w

$$Dw = \frac{R^2}{C_{11}^E}\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{R^2}{C_{11}^E h}q_r - \vartheta\frac{e_{31}}{C_{11}^E}RE_r^{(0)}.$$

Для сферической электроупругой оболочки:

$D = -2\left(1+\xi\right)$; $\vartheta = 2$;

для цилиндрической электроупругой оболочки:

$D = -1$; $\vartheta = 1$.

Механические и электрические граничные условия

Гидроэлектроупругие системы включают в себя единичные пьезокерамические преобразователи энергии или их совокупность, а также жидкие среды, которые могут заполнять безграничное внешнее пространство и внутренние объемы. Кроме того, в таких системах возможно наличие упругих, жестких или не воспринимающих нагрузок (свободных) поверхностей. Теоретическое исследование их динамического поведения сводится к совместному решению уравнений, описывающих движение электроупругих (упругих) и жидких сред при соответствующих граничных условиях для характеристик сопряженных механических и электрических полей, а также условиях на бесконечности и в начале координат [8]. При изучении нестационарных процессов необходимо также задать начальные условия.

При взаимодействии тонкостенной пьезокерамической оболочки с акустической средой граничными являются условия, обеспечивающие равенство нормальных составляющих скоростей жидкости и оболочки

$$\left(\vec{\mathrm{V}}\cdot\vec{n}\right)\Big|_{\Gamma}=\frac{\partial w}{\partial t},$$

где $\vec{\mathrm{V}}$ – вектор колебательной скорости жидкости; $\vec{n}$ – нормаль к поверхности оболочки Γ.

Для пьезокерамических тел, помимо механических условий, требуется сформулировать условия для электрического поля. При возбуждении пьезокерамической оболочки электрическим напряжением Q, это условие примет вид [4]

$$E_r^{(0)}=\frac{Q}{h}.$$

В случае, когда электроды преобразователя закорочены, электрическая напряженность записывается следующим образом

$$E_r^{(0)}=0.$$

Когда электроды разомкнуты (это соответствует случаю, когда они подключены к электронному устройству с бесконечно большим входным сопротивлением – несколько десятков МОм) электрические граничные условия записываются в виде

$$I_c=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Gamma}\left(\vec{n}\vec{D}\right)d\Gamma=0,$$

где I_c – ток смещения в пьезокерамике; $\vec{D}$ – электрическая индукция.

Когда поверхности оболочки неэлектродированы, т.е. электроды отсутствуют, принимается равенство

$$\left(\vec{n}\vec{D}\right)=0.$$

Здесь приведены те виды граничных условий, которые являются наиболее характерными при решении прикладных задач гидроэлектроупругости.

Кроме приведенных граничных условий необходимо потребовать, чтобы для расходящихся в неограниченном пространстве акустических волн выполнялось условие затухания, т.е. чтобы характеристики процесса убывали при $r \to \infty$, а решение в замкнутых объемах было ограничено при $r \to 0$.

Постановка нестационарных задач механики сплошных сред помимо краевых должна содержать начальные условия. Для гидроэлектроупругих систем, которые до момента приложения внешних возбуждающих воздействий (t=0) находились в состоянии покоя, динамические характеристики процесса (скорости, давления, перемещения и т.д.) принимаются равными нулю.

Выводы

1. С привлечением линейной теории электроупругости и гипотез Кирхгофа-Лява в рамках теории электроупругих оболочек записаны уравнения трехмерных колебаний радиально поляризованных цилиндрических и сферических оболочек.

2. Уравнения движения оболочек представляют собой систему трех линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка, записанные относительно перемещений u, v, w. Приведены дифференциальные операторы, входящие в эти уравнения, для пьезокерамических оболочек сферической и цилиндрической форм.

3. Приведены уравнения движения пьезокерамических оболочек для ряда частных случаев, когда они совершают двухмерные, а также одномерные (пульсирующие) колебания.

4. Сформулированы механические и электрические граничные условия, которые обычно встречаются в прикладных задачах гидроэлектроупругости при изучении колебаний тонкостенных электроакустических преобразователей, работающих в режимах излучения и приема акустических волн.

Список использованной литературы

1. Пьезокерамические преобразователи (Справочное пособие) / [Минаев И.Г., Бондаренко Ю.Ю., Кисиль Т.Ю. и др.] ; под ред. В.М. Шарапова. – Черкассы: ЧГТУ, 2004. – 435 с.
2. *Дідковський В. С.* Електроакустичні п’єзокерамічні перетворювачі (розрахунок, проектування, конструювання) / В. С. Дідковський, О. Г. Лейко, В. Г. Савін – Кіровоград: «Імекс-ЛТД» . – 2006. – 448 с.
3. *Микеладзе М. Ш.* Введение в техническую теорию идеально-пластичных тонких оболочек / М.Ш. Микеладзе. – Тбилиси: Менцниреба, 1969. – 182

с.
4. *Гринченко В. Т.* Механика связанных полей в элементах конструкций : в 5 т. / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – Киев : Наук. думка, 1989 – .– Т. 5: Электроупругость. – 1989. – 280 с.
5. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
6. *Павловський М. А.* Теоретична механіка / М.А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
7. *Савельев И. В.* Основы теоретической физики : в 2 т. / И.В. Савельев. – М.: Нука, 1991.– Т. 1: Механика и электродинамика. – 1991. – 496 с.
8. *Бабаев А. Э.* Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей / А.Э. Бабаев. – К.: Наук. думка, 1990. – 176 с.