

УДК 629.735

О. П. Мариношенко, Ю. В. Франчук

## РУХ РАКЕТИ В ПРОСТОРИ

### Вступ

Однією з особливостей створення нових конструкцій сучасних ракет є нерозривний зв'язок проектування з аеродинамічними, температурними, динамічними розрахунками та розрахунками на міцність.

У ряді сучасних досліджень щодо вивчення динаміки ракетної техніки, даний літальний апарат розглядається, як пряма, пружна балка (стрижень), змінної маси, геометрії та жорсткості з незакріпленими краями [1, 2].

В залежності від постановки та змісту досліджуваної проблем створено ряд механічних моделей, які значну увагу приділяють новим модельним підходам, на основі яких можна отримувати не тільки лінійні, а й різні варіанти нелінійних рівнянь руху ракети-балки; на основі встановлених співвідношень можна формулювати різні варіанти рівнянь для дослідження динамічної та статичної стійкостей, керованості, міцності розглядуваної механічної системи.

### Постановка задачі

Сучасний стан динамічної поведінки ракети, описаний в ряді літературних джерел [1, 2], не враховує деяких важливих для стержневих конструкцій навантажень таких, як рух палива по трубопроводах, взаємопов'язані коливальні рухи корпусу ракети. Дана стаття присвячена розробці однієї з математичних моделей, яка б враховувала вище зазначені динамічні фактори, які суттєво впливають на рух ракети в просторі.

Досліджуваний літальний апарат розглядається як пряма пружна балка змінної жорсткості з незакріпленими кінцями. Система диференціальних рівнянь в двох поперечних площинах, що описує поперечні коливання прямої балки, має вигляд [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \mu(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_Y(x, t), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] + \mu(x) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = F_Z(x, t), \end{cases}$$

де  $x$  – координата точки на поздовжній осі, відрахована від носової частини корпусу літального апарата;  $y(x, t)$ ,  $z(x, t)$  – прогин осі балки в перерізі  $x$ , що виникає в напрямку, перпендикулярному до недеформованої осі балки;  $E$  – модуль пружності;  $J(x)$  – момент інерції поперечного перерізу балки

відносно нейтральної осі перерізу, перпендикулярної до площини коливань;  $\mu(x)$  – маса одиниці довжини балки;  $F_Y(x,t), F_Z(x,t)$  – зовнішнє динамічне навантаження, віднесене до одиниці довжини балки.

Істотний вплив на пружні коливання літального апарату при його польоті в щільних шарах атмосфери здійснюють аеродинамічні сили. Для спрощення задачі вважають, що дані сили не залежать від деформації апарату в процесі його польоту, тобто досліджується тільки рух відповідного абсолютно жорсткого літального апарату (ЛА), при цьому силами тяги, перпендикулярними до осі ЛА, також нехтують.

### Системи відліку та основні припущення

За інерціальну систему координат (СК) вибрано стартову СК  $O_{cm}x_{cm}y_{cm}z_{cm}$ ; вісь  $O_{cm}y_{cm}$  направлено вгору по осі ракети; вісь  $O_{cm}x_{cm}$  розміщено в площині стрільби;  $O_{cm}z_{cm}$  направлено в той бік, щоб інерціальна СК була правою. Початок зв'язаної СК вибрано в центрі мас ракети; вісь  $Cx^3$  направлено по осі ракети;  $Cy^3$  – в площині симетрії, по напрямку дії підйомної сили;  $Cz^3$  – направлено в ту сторону, щоб СК  $Cx^3y^3z^3$  була правою.

Рівняння поздовжніх та згинних коливань ракети-балки змінної маси будемо виводити на основі теореми про зміну кількості руху [4]. Рівняння поздовжніх коливань мають наступний вигляд

$$m_{\delta}(x,t) \left( \frac{dv_{cx}}{dt} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + p_{\Pi x} + f_x^k - m_{\delta}(x,t) g \sin \vartheta + \frac{T}{l} + f_x^A + g_{вар,x}, \quad (1)$$

де  $m_{\delta}(x,t)$  – розподілена по довжині і змінна в часі маса;  $v_{cx}$  – проекція вектора швидкості ракети на вісь  $Cx$ ;  $u(x,t)$  – повздовжнє переміщення осі балки;  $E(x)$  – усереднене значення модуля Юнга по перерізу з площею  $S(x)$ ;  $p_{\Pi x}$  – головний вектор поверхневих сил;  $f_x^A$  – вектор зведених до осі балки-ракети аеродинамічних сил;  $f_x^k$  – вектор сил керування;  $g$  – стала сил тяжіння;  $T$  – сила тяги;  $l$  – довжина ракети-балки;  $g_{вар,x}$  – вектор інтенсивності варіаційних сил, що обумовлюються переміщенням центра мас в результаті протікання палива в середині виділеного елемента.

Рівняння згинних коливань ракети-балки в площині  $Cxy$  з одночасним врахуванням дії поздовжніх коливань, зміни в часі маси ракети-балки представляємо в наступному вигляді [4]

$$m_{\delta}(x,t) \left( \frac{dv_{cy}}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = -\frac{\partial Q_2^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} N^* \right) + p_{\Pi y} + f_y^A + f_y^k - \\ - m_{\delta}(x,t) g \cos \vartheta + q_{e,y}^{cor} + q_{var,y}, \quad (2)$$

де  $v_{cy}$  – проекція вектора швидкості на вісь  $Cy$ ;  $w(x,t)$ ,  $v(x,t)$  – прогини балки в двох взаємно перпендикулярних площинах симетрії;  $q_{e,y}^{cor}$  – вектор інтенсивності коріолісових сил інерції від переносного обертального руху;  $N^*$  – поздовжнє зусилля;  $\vartheta = \vartheta(t)$  – кут тангажу.

Відомо, що

$$N^* = E(x)S(x) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Нелінійні диференціальні рівняння (1), (2) описують взаємозв'язані поздовжньо-згинні коливання ракети-балки.

### Рівняння просторового руху ракети

Приймаємо, що ракета стартує з певної площадки на поверхні Землі і продовжує рух вгору по прямолінійній траєкторії, в такому випадку в початковий момент часу  $t=0$ , тобто в момент старту, осі траєкторної і зв'язаної СК будуть збігатися таким чином, що будуть мати місце наступні рівності ортів розглядуваних СК

$$\vec{i}_T = \vec{j}_z, \vec{j}_T = \vec{k}_z, \vec{k}_T = \vec{i}_z.$$

На рис. 1 через  $C_{cm}$  позначено початок стартової СК, який збігається з центром мас ракети при  $t=0$ ,  $C_t$  – положення цього центра мас при  $t>0$ .

Згідно вказаних вище припущень, рух ракети буде здійснюватись по прямолінійній траєкторії, напрям якої задається ортом  $\vec{j}_{cm}$ . Таким чином вводимо траєкторну СК. Вісь  $Cx_m$  направляємо по дотичній до траєкторії, яку описує точка С при польоті ЛА. Через вісь  $Cx_m$  проводимо вертикальну площину, в якій розміщується місцева вертикаль. У вказаній площині проводимо вісь  $Cy_m$ , перпендикулярну до  $Cx_m$ ; вісь  $Cz_m$  направляємо в той бік, щоб система відліку  $Cx_my_mz_m$  була правою.

Вважаємо, що розглядуваний вертикальний рух ракети здійснюється в межах тропосфери, тоді необхідно врахувати у вказаному рівнянні складові, що описують аеродинамічні сили та моменти. В межах стратосфери вказаними складовими необхідно нехтувати.

Після громіздких аналітичних перетворень можна отримати спрощені скалярні рівняння обертального руху та рівняння, що описують рух центра мас ракети [2]

$$\left\{ \begin{array}{l}
m(t) \frac{dv_c}{dt} = -m(t)g \sin \theta - X_v^A + (T_x + F_x^k) \cos \alpha \cos \beta - \\
-(T_y + F_y^k) \sin \alpha \cos \beta + \\
+(T_z + F_z^k) \sin \beta + m(t)(W_{c,xT}^{cor} + \omega_{cr,yT}); \\
m(t)v_c \frac{d\theta}{dt} = -m(t)g \cos \theta - Y_v^A \cos \gamma_{vT} - Z_v^A \sin \gamma_{vT} + \\
+(T_x + F_x^k)(\sin \alpha \cos \gamma_{vT} + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_{vT}) + \\
+(T_y + F_y^k)(\cos \alpha \cos \gamma_{vT} - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma_{vT}) - \\
-(T_z + F_z^k) \cos \beta \sin \gamma_{vT} + m(t)(W_{c,yT}^{cor} + \omega_{cr,yT}); \\
m(t)v_c \cos \theta \frac{d\psi}{dt} = Y_v^A \sin \gamma_{vT} + Z_v^A \cos \gamma_{vT} + \\
+(T_x + F_x^k)(\sin \alpha \sin \gamma_{vT} - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_{vT}) + \\
+(T_y + F_y^k)(\cos \alpha \sin \gamma_{vT} + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma_{vT}) + \\
+(T_z + F_z^k) \cos \beta \cos \gamma_{vT} + m(t)(W_{c,zT}^{cor} + \omega_{cr,zT}) \\
\frac{dK_x}{dt} + \omega_y^p K_z - \omega_z^p K_y = M_x^A + M_x^{gap} + M_x^k + M_x^{cor} + M_x^p; \\
\frac{dK_y}{dt} + \omega_z^p K_x - \omega_x^p K_z = M_y^A + M_y^{gap} + M_y^k + M_y^{cor} + M_y^p; \\
\frac{dK_z}{dt} + \omega_x^p K_y - \omega_y^p K_x = M_z^A + M_z^{gap} + M_z^k + M_z^{cor} + M_z^p;
\end{array} \right. \quad (3)$$

де  $X_v^A, Y_v^A, Z_v^A$  – проєкції аеродинамічної сили на осі обраної СК;  
 $\omega_{cr}$  - проєкція варіаційних сил;  $K_x, K_y, K_z$  – проєкції кінетичного моменту;  
 $\omega_x^p, \omega_y^p, \omega_z^p$  – проєкції кутової швидкості обертання ракети;  
 $\vec{M}_c^A, \vec{M}_c^{gap}, \vec{M}_c^k, \vec{M}_c^p, \vec{M}_c^{cor}$  – головні моменти відповідно аеродинамічних,  
коріолісових, поверхневих, варіаційних сил і сил керування.

Для того, щоб задати орієнтацію швидкісної СК необхідно ввести до розгляду кути ковзання та атаки.

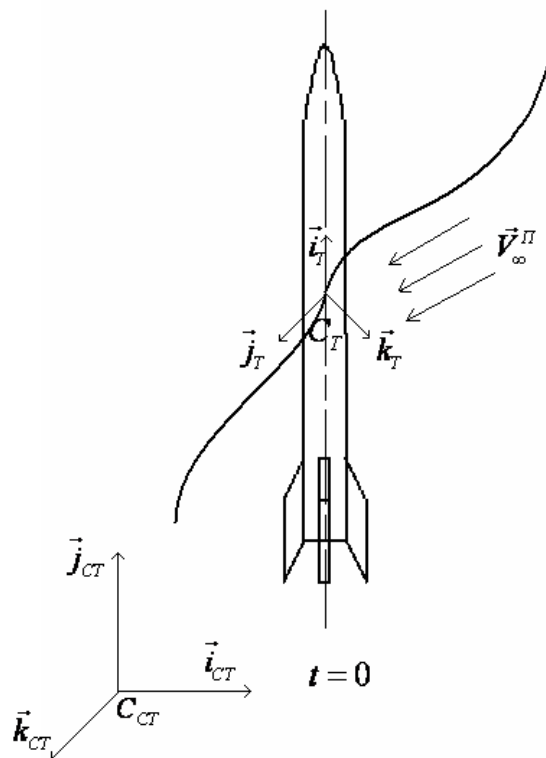


Рис. 1. Досліджувана механічна система

Вважаємо, що при русі ракети в повітряних шарах будуть мати місце рівності

$$\theta = \frac{\pi}{2}; \Psi = 0; \gamma_{vT} = 0.$$

Необхідно визначитись відносно величини кутів атаки  $\alpha$  і ковзання  $\beta$ ; для цього слід вибрати конкретний напрям руху повітряних мас, для цього будемо припускати, що в межах тропосфери і стратосфери має місце горизонтальний потік (паралельно площині  $y_{cm}z_{cm}$ ) повітряних мас зі сталою швидкістю  $V_{\infty}^n$ , величина якої залежить від висоти польоту ракети.

Вважаємо, що напрям вектора  $V_c$  збігається з напрямом осі  $Sy_T$  траекторної СК. При вертикальному польоті цілком очевидно, що  $T_x = T$ ,  $T_y = T_z = 0$ . Реальна ракета має свою систему стабілізаторів і рулів, розміщених у формі пластин на цих стабілізаторах, або окремо розміщених - газові рулі.

При обтіканні ракети горизонтальним повітряним потоком слід очікувати виникнення поперечної підйомної сили зі складовими  $Y_v^A$  і  $Z_v^A$ , а також моменту  $M_x^A$ , який буде намагатись обернути ракету навколо її осі симетрії.

Виникнення в процесі польоту ракети вказаних сил і моментів необхідно компенсувати, що може бути здійснене прикладанням безперервно або імпульсивно сил  $F_y^k, F_z^k$  і момент  $M_x^k$  керування.

У розглядуваній механічній системі – ракеті слід очікувати обертальні рухи навколо її осі симетрії; тут має місце переміщення мас – відповідні рухи рідин або газів по трубопроводним каналам в середині ракети.

Якщо осі трубопроводів приблизно паралельні осі ракети, то прискорення Кориоліса і відповідні їм сили, моменти будуть відсутні, при просторовому викривленні трубопроводних систем будуть з'являтися сили і моменти інерції від кориолісових прискорень.

Позначимо через  $C_r$  – центр мас рідинних або газових потоків, що протікають;  $\vec{q}_e^{cor}$  – прискорення Кориоліса, прикладене до вказаного центра мас

$$\vec{q}_e^{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{cr}^{(k)} = 2\left(\omega_y^p v_{3r}^{(k)} - \omega_z^p v_{2r}^{(k)}\right)\vec{e}_{11} + 2\left(\omega_z^p v_{1r}^{(k)} - \omega_x^p v_{3r}^{(k)}\right)\vec{e}_{12} + 2\left(\omega_x^p v_{2r}^{(k)} - \omega_y^p v_{1r}^{(k)}\right)\vec{e}_{13}.$$

У наведеному виразі  $v_{1r}^{(k)}, v_{2r}^{(k)}, v_{3r}^{(k)}$  – проекції вектора швидкості  $\vec{v}_{cr}^{(k)}$  на осі зв'язаної СК.

В даному рівнянні кутові швидкості мають наступний вигляд:

$$\omega_x^p = 0, \quad \omega_y^p = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}, \quad \omega_z^p = \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}.$$

Для деякого спрощення досліджень припускаємо, що відносні швидкості переміщення матеріальних частинок по трубопроводах є сталі величини. Тоді варіаційними силами можна нехтувати.

Беручи до уваги сформульовані вище припущення скалярні рівняння руху ракети – балки матимуть наступний вигляд

$$\begin{cases} m(t) \frac{dv_c}{dt} = -m(t)g - X_v^A + T + F_x^k + m_r(t)\vec{q}_{e,xT}^{cor}; \\ 0 = Y_v^A + F_y^k; \\ 0 = Z_v^A + F_z^k. \end{cases} \quad (4)$$

У рівнянні (4) через  $q_{e,xT}^{cor}$  позначено проекцію вектора  $W_{cr}^{cor}$  на вісь  $Cx_T$  траєкторної СК;  $X_v^A$  – аеродинамічна сила опору в проекції на напрям руху ракети

$$X_v^A = \frac{1}{2} \rho_n^n v_c^2 S C_{vx}^A, \quad (5)$$

де  $\rho_n^n$  – густина повітря тропосфери на висоті польоту  $H$ ;  $S$  – площа міделевого перерізу ракети;  $C_{vx}^A$  – аеродинамічний коефіцієнт опору у швидкісній системі координат.

Задачу про обтікання ракети горизонтальним повітряним потоком будемо трактувати як класичну задачу обтікання видовженого кругового

циліндра потоком ідеальної рідини. Так існуватиме лише складова аеродинамічної сили  $Z_v^A$ , яка перпендикулярна напрямку руху горизонтального потоку, а  $Y_v^A = 0$ .

$$Z_v^A = \frac{1}{2} \rho_H^n v_c^2 S C_{vz}^A. \quad (6)$$

Приймаючи до уваги формули (5) і (6), рівняння руху (4) представляємо в наступному вигляді

$$m(t) \frac{dv_c}{dt} = -m(t)g - \frac{1}{2} \rho_H^n v_c^2 S C_{vx}^A + T + F_x^k + m_r(t) q_{e,xT}^{cor} + \frac{1}{2} \rho_H^n v_c^2 S C_{vz}^A + F_z^k. \quad (7)$$

Бачимо, що в цих рівняннях необхідно задавати конкретні значення для  $\theta_k$  і  $q_{e,xT}^{cor}$ .

Оскільки  $\psi = 0, \vartheta = 0$  і в загальному випадку  $\gamma \neq 0$ , то рівняння обертального руху ракет матимуть вигляд

$$\omega_x = \dot{\gamma}; \omega_y = 0; \omega_z = 0.$$

Тоді з рівнянь (3)

$$\frac{d}{dt} [I_x(t) \dot{\gamma}] = M_x^k + M_x^A. \quad (8)$$

Згідно припущень і вказаної симетрії в ракеті

$$M_x^{cap} = 0; M_x^{cor} = 0; M_x^P = 0.$$

Момент керування, який потрібно безперервно прикладати в процесі польоту, визначається з формули (8)

$$M_x^k = \frac{d}{dt} [I_x(t) \dot{\gamma}] - M_x^A.$$

В більшості випадків, на основі експериментальних досліджень,  $\dot{\gamma}$  є порівняно мала стала величина. Тому гасіння обертальних рухів можна здійснювати за допомогою стабілізаторів ракети.

Тоді

$$M_x^k = -M_x^A.$$

Після громіздких перетворень математичну модель (1), (2), (7) зводимо до наступного вигляду. Задаємо координатні функції прогинів по осям  $Y$  та  $Z$  та поздовжніх переміщень в наступному вигляді

$$w(x,t) = c_1(t) \gamma_1(x); v(x,t) = c_2(t) \gamma_1(x); u(x,t) = a_1(t) \psi_1(x), \quad (9)$$

де  $\gamma_1(x)$ ,  $\psi_1(x)$  мають вид

$$\gamma_1(x) = \frac{q}{24EI}x^4 - \frac{4ql}{24EI}x^3 + \frac{6ql^2}{24EI}x^2; \psi_1(x) = \frac{x}{l}(3 - e^{\frac{x}{l}}), \quad (10)$$

де  $q$  – зовнішнє розподілене навантаження,  $l$  – довжина ракети.

Остаточно модель коливальних рухів ракети – балки з врахуванням (9), (10) перетворюється до такого вигляду

$$\begin{aligned} A_2 a_1''(t) + A_1 a_1'(t) + A_0 a_1(t) &= F_1(x, t); \\ B_2 c_2''(t) + B_1 c_2'(t) + B_0 c_2(t) + B_{00} c_1(t) a_1(t) &= F_2(x, t); \\ D_2 c_1''(t) + D_1 c_1'(t) + D_0 c_1(t) + D_{00} a_1(t) c_2(t) &= F_3(x, t), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} A_2(x, t) &= m_\delta(x, t) \psi_1(x); A_1(x, t) = 0; A_0(x, t) = -E(x) \dot{\psi}_1(x); \\ F(x, t) &= p_{nx} + f_x^A + \frac{T}{l} + q_{vap, x} - m_\delta(x, t) \frac{dv_{cx}}{dt}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2(x, t) &= m_\delta(x, t) \gamma_1(x); B_1(x, t) = -2\gamma_1'(x); B_0(x, t) = (\gamma_1''(x) E(x) J(x))''; \\ B_{00}(x, t) &= -E(x) S(x) (\gamma_1'(x) \psi_1'(x))' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x, t) &= -m_\delta(x, t) \frac{dv_{cy}}{dt} + i_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} (\dot{\gamma}) - \frac{\partial}{\partial x} (m_z^A + m_z^k + m_z^\Pi) + \\ &+ p_{ny} + f_y^A + f_y^k - m_\delta(x, t) g \cos \vartheta + q_{e, y}^{cor} + q_{vap, y}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2(x, t) &= m_\delta(x, t) \gamma_1(x); D_1(x, t) = -2\gamma_1'(x); D_0(x, t) = (\gamma_1''(x) E(x) J(x))''; \\ D_{00}(x, t) &= -E(x) S(x) (\gamma_1'(x) \psi_1'(x))' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x, t) &= -m_\delta(x, t) \frac{dv_{cy}}{dt} + i_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} (\dot{\gamma}) - \frac{\partial}{\partial x} (m_z^A + m_z^k + m_z^\Pi) + \\ &+ p_{ny} + f_y^A + f_y^k - m_\delta(x, t) g \cos \vartheta + q_{e, y}^{cor} + q_{vap, y}. \end{aligned}$$

З розв'язку наведеної системи рівнянь знаходимо прогини досліджуваного механічного об'єкту.

Прогини з використанням вказаних форм мають вид, представлений на (рис. 2).



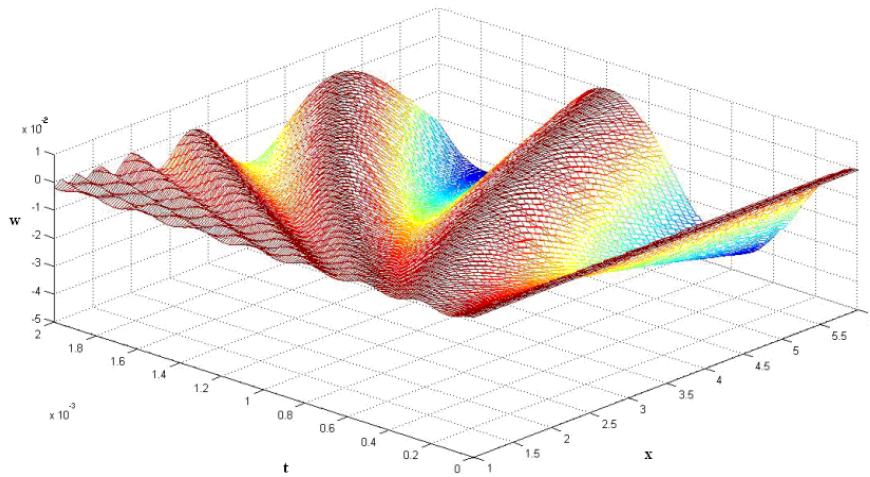


Рис. 2. 3d графік прогинів для довільної точки

Проведемо порівняльну характеристику отриманих значень за даною математичною моделлю та за класичними рівняннями коливань прямої балки. (рис. 3, 4).

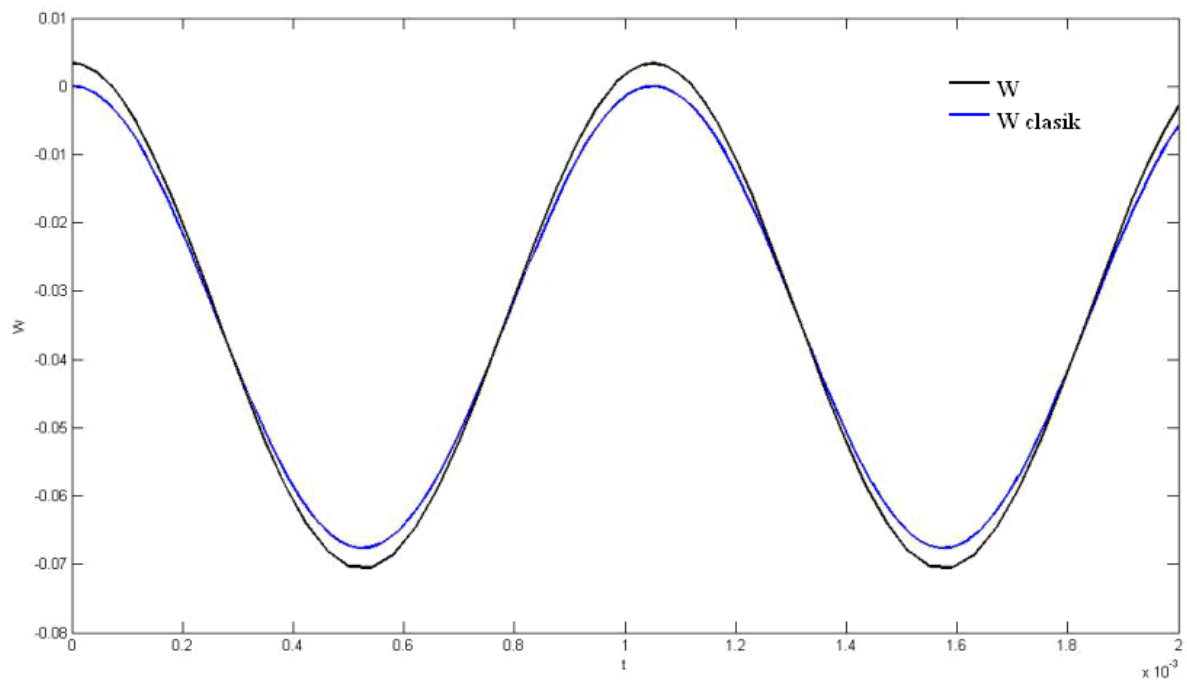


Рис. 3. Порівняння прогинів за класичною та запропонованою моделлю

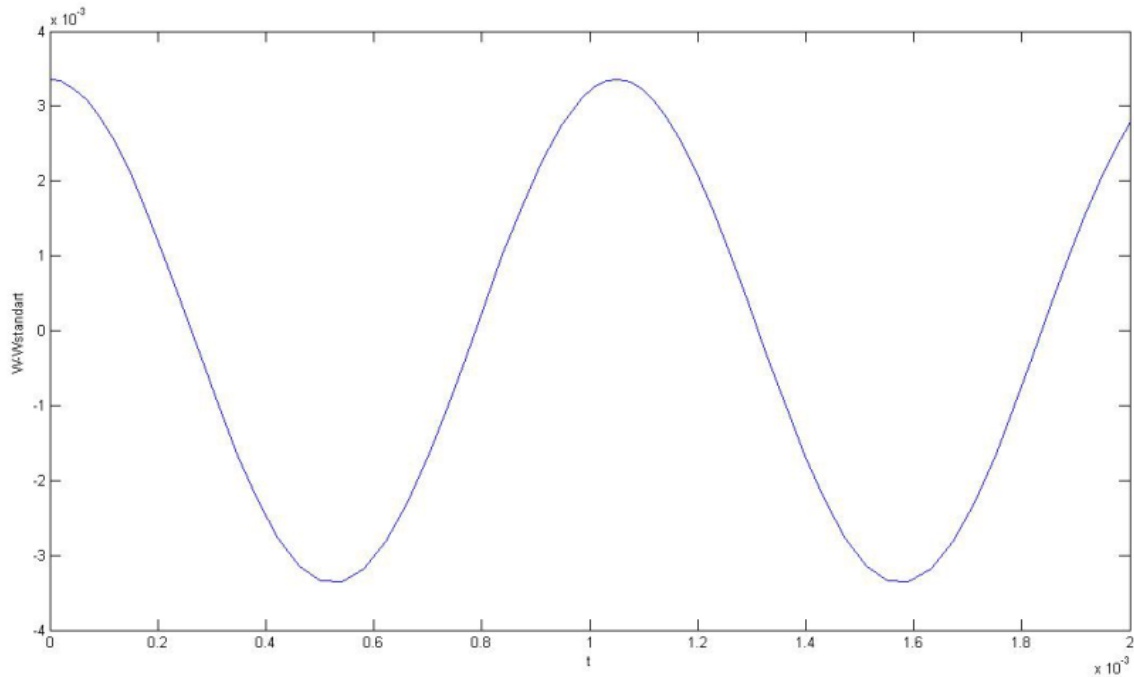


Рис. 4. Різниця прогинів між класичною та запропонованою моделями

Як бачимо з наведених графіків коливальних рухів ракети-балки, врахування збурюючих факторів (руху палива по трубопроводах агрегатів, нелінійності аеродинамічних зовнішніх навантажень) суттєво впливає на динамічні рухи досліджуваного механічного об'єкту. Так, врахування нелінійності та взаємозв'язності коливальних рухів призводить до суттєвого збільшення амплітуди коливань, яке в даному випадку складає 10% в порівнянні зі стандартно прийнятою моделлю.

### Висновки

В роботі сформульована математична модель, яка враховує розподіл мас, форму досліджуваної балки-ракети, дію на неї в процесі польоту зовнішніх та внутрішніх силових факторів. Дана математична модель надає можливість враховувати жорсткісні характеристики поперечних перерізів ракети, рух палива по трубопроводах, нелінійний характер зовнішніх навантажень, що, на відміну від класичної моделі, відобразити взаємопов'язані коливальні процеси, які відбуваються при русі ракети в суцільному середовищі.

В подальшому на основі проведених досліджень буде визначено траєкторії руху ракети в суцільному середовищі та досліджено відхилення від заданих параметрів руху при врахуванні нестационарних збурюючих факторів.

### Список використаної літератури

1. *Лебедев А.А., Чорнобровкин Д.С.* Динамика полета беспилотных ЛА. Учебн. Пособие для вузов. Изд. 2-е переработанное и доп.- М.:Машиностроение, 1973р, 616 с.
2. *К.А. Абряган, Э.Л. Калязин, В.П. Мишин и др.* Динамика ракет. Учебник для студентов. Под общ.Ред. В.П. Мишина. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.:Машиностроение, 1990. – 464 с.
3. *Собрание трудов академика А.Н. Крылова.* Вибрация судов. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – С.364-398.
4. *Каюк Я.Ф.* Задача про моделювання ракети балкою зі змінними приведеними характеристиками // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008. – №2. – с.31-42.