УДК 531.383

**О. В. Прохорчук, П. В. Войлов**

# УЗАГАЛЬНЕНИЙ АЛГОРИТМ ОЦІНКИ ЧУТЛИВОСТІ СПОСТЕРІГАЧІВ КАЛМАНІВСЬКОГО ТИПУ ДО НЕТОЧНОСТІ ЗАДАННЯ ПАРАМЕТРІВ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИСТЕМИ

## Вступ

Останнім часом розроблювачами навігаційної техніки багато уваги приділяється алгоритмам обробки інформації, яка надходить як від окремих датчиків, так і від цілих комплексованих систем. Найбільше широко для обробки навігаційної інформації, особливо при інтегруванні систем, використовуються різні модифікації оптимального фільтра Калмана (ФК).

При розробці алгоритмів оцінювання калманівського типу велике значення має проблема оцінки чутливості спостерігача до неточності задання параметрів математичної моделі системи. Однак до останнього часу в літературі розглядалися лише часткові випадки, що не дають можливості дослідити поведінку системи в цілому [1-3].

Тому метою авторів було розробити узагальнені алгоритми, що можуть застосовуватися для оцінки чутливості спостерігачів калманівського типу до неточності задання параметрів математичної моделі з урахуванням наявності в вихідному сигналі системи детермінованої в часі функції та корельованості шумів вимірювання та шумів зовнішніх збурень.

## Постановка задачі оптимального оцінювання похибок системи

Припустимо, що е вихідному сигналі системи присутня детермінована в часі функція, а шуми вимірювання та шуми зовнішніх збурень корельовані між собою. Тоді алгоритм розширеного дискретного фільтру Калмана (ФК) буде мати наступний вигляд [1, 4]:

- алгоритм однокрокового прогнозування $\hat{X}(k+1|k)$ оцінки вектора стану $X(k+1)$ за даними на $k$-ому кроці

$$\hat{X}(k+1|k) = A(k+1)\cdot\hat{X}(k) + B(k)\cdot U(k) + \\ + K_P(k)\cdot\left[Y(k) - U_y(k) - C(k)\cdot\hat{X}(k)\right];$$

$$Y(k) = C(k)X(k) + D(k)W(k) + V(k) + U_y(k). \qquad (1)$$

- обчислення коефіцієнта підсилення при однокроковому прогнозуванні

$$K_P(k) = G(k)\cdot Q_R(k)\cdot R^{-1}(k), \qquad (2)$$

$Q_R(k)$ – взаємна коваріаційна матриця шумів вимірювання і зовнішніх збурень;

- алгоритм фільтрації – обчислення оцінки $\hat{X}(k+1)$ вектора стану $X(k+1)$ з урахуванням $k+1$ вимірів, що надійшли в $Y(k+1)$:

$$\widehat{X}(k+1)=\widehat{X}(k+1|k)+K(k+1)[Y(k+1)-U_y(k+1)-$$
$$-C(k+1)\cdot\widehat{X}(k+1|k)]. \qquad (3)$$

Коефіцієнт підсилення при фільтрації $K(k+1)$ визначається за допомогою наступної рекурентної процедури:

$$K(k+1)=P(k+1|k)C^T(k+1)\Big[C(k+1)P(k+1|k)C^T(k+1)+R(k+1)\Big]^{-1};$$
$$P(k+1|k)=[A(k+1)-K_P(k)\cdot C(k)]\cdot P(k)\cdot[A(k+1)-$$
$$-K_P(k)\cdot C(k)]^T+G(k)\cdot Q(k)\cdot G^T(k)-K_P(k)\cdot R(k)\cdot K_P^T(k);$$
$$P(k+1)=\big[I-K(k+1)\cdot C(k+1)\big]\cdot P(k+1|k), \qquad (4)$$

де $P(k+1|k)$, $P(k+1)$ – коваріаційні матриці похибок прогнозування $E(k+1|k)$ і похибок оцінки $E(k+1)$ відповідно.

**Аналіз чутливості алгоритму ФК до неточності задання параметрів математичної моделі системи**

Алгоритм ФК забезпечує мінімальну середньоквадратичну похибку оцінки вектора стану лише за умови, що всі параметри моделі (1) точно відомі [5].

Позначимо через $A(k+1)$, $B(k)$, $C(k)$, $Q$, $R$, $Q_R$ матриці, які використовуються в математичній моделі, через $\hat{A}(k+1)$, $\hat{B}(k)$, $\hat{C}(k)$, $\hat{Q}$, $\hat{R}$ та $\hat{Q}_R$ точні значення цих матриць, а через $\Delta A$, $\Delta B$, $\Delta C$, $\Delta Q$, $\Delta R$, $\Delta Q_R$ – їх похибки. Тоді:

$$\Delta A(k+1)=A(k+1)-\hat{A}(k+1); \quad \Delta B(k)=B(k)-\hat{B}(k);$$
$$\Delta C(k)=C(k)-\hat{C}(k); \quad \Delta Q=Q-\hat{Q}; \quad \Delta R=R-\hat{R}; \quad \Delta Q_R=Q_R-\hat{Q}_R. \qquad (5)$$

Необхідно зазначити, що у випадку, коли будь-які з матриць $\Delta A$, $\Delta B$, $\Delta C$, $\Delta Q$, $\Delta R$ або $\Delta Q_R$ не дорівнюють нулю, то матриці $P(k+1|k)$ та $P(k+1)$ вже не будуть являти собою дійсні матриці коваріацій похибок оцінювання [5].

Тоді точне значення вектора стану $X(k+1)$ обчислюється за формулою [5]

$$X(k+1)=\hat{A}(k+1)X(k)+\hat{B}(k+1)U(k+1)+\hat{G}(k+1)W(k+1). \qquad (6)$$

Введемо наступні позначення:

$$\overline{X}(k+1)=X(k+1)-\hat{X}(k+1);$$
$$\overline{X}(k+1/k)=X(k+1/k)-\hat{X}(k+1/k);$$
$$m(k+1)=E[X(k+1)-\hat{X}(k+1)]; \qquad (7)$$

$$m\left(k+1/k\right)=E[X\left(k+1\right)-\hat{X}\left(k+1/k\right)];$$

$$\hat{P}\left(k+1/k\right)=E\{[\overline{X}\left(k+1/k\right)-m\left(k+1/k\right)][\overline{X}\left(k+1/k\right)-$$
$$-m\left(k+1/k\right)]^T;$$

$$\hat{P}\left(k+1\right)=E\{[\overline{X}\left(k+1\right)-m\left(k+1\right)][\overline{X}\left(k+1\right)-m\left(k+1\right)]^T, \qquad (8)$$

де $E[...]$ – оператор математичного очікування; $m(k+1/k)$ та $m(k+1)$ - вектори середніх значень похибок однокрокового прогнозу та оцінки; $\hat{P}(k+1|k)$ та $\hat{P}(k+1)$ – дійсні значення коваріаційних матриць однокрокового прогнозу та оцінки вектора стану.

Безпосередня підстановка рівнянь (1), (3), (5) в (7), (8) дає шукані співвідношення:

$$\begin{aligned}
\hat{P}\left(k+1\right)=&\left(I-K\left(k+1\right)C\left(k+1\right)\right)\left[\hat{P}\left(k+1/k\right)+\right.\\
&\left.+m(k+1/k)m^T\left(k+1/k\right)\right]\left(I-K\left(k+1\right)C\left(k+1\right)\right)^T+\\
&+K\left(k+1\right)\Delta C\left(k+1\right)\Theta\left(k+1/k\right)\left(I-K\left(k+1\right)C\left(k+1\right)\right)^T+\\
&+\left(I-K\left(k+1\right)C\left(k+1\right)\right)\Theta^T(k+1/k)\Delta C^T(k+1)K^T(k+1)+\\
&+K\left(k+1\right)\Delta C\left(k+1\right)\Psi\left(k+1\right)\Delta C^T\left(k+1\right)K^T\left(k+1\right)+\\
&+K\left(k+1\right)\hat{R}\left(k+1\right)K^T\left(k+1\right)-m\left(k+1\right)m^T\left(k+1\right);
\end{aligned} \qquad (9)$$

$$
\begin{aligned}
\hat{P}(k+1/k) = {} & A(k+1)[\hat{P}(k)+m(k)m^T(k)]A^T(k+1)- \\
& -K_p(k+1)C(k+1)[\hat{P}(k)+m(k)m^T(k)]A^T(k+1)- \\
& -A(k+1)[\hat{P}(k)+m(k)m^T(k)]C^T(k+1)K_p^T(k+1)+ \\
& +K_p(k+1)C(k+1)[\hat{P}(k)+m(k)m^T(k)]C^T(k+1)K_p^T(k+1)+ \\
& +\Delta A(k+1)\Psi(k)\Delta A^T(k+1)-K_p(k+1)\Delta C(k+1)\Psi(k)\Delta A^T(k+1)- \\
& -\Delta A(k+1)\Psi(k)\Delta C^T(k+1)K_p^T(k+1)+ \\
& +K_p(k+1)\Delta C(k+1)\Psi(k)\Delta C^T(k+1)K_p^T(k+1)- \\
& -\Delta A(k+1)\Theta(k)A^T(k+1)+\Delta A(k+1)\Theta(k)C^T(k+1)K_p^T(k+1)+ \\
& +K_p(k+1)\Delta C(k+1)\Theta(k)A^T(k+1)- \\
& -K_p(k+1)\Delta C(k+1)\Theta(k)C^T(k+1)K_p^T(k+1)- \\
& -A(k+1)\Theta^T(k)\Delta A^T(k+1)+A(k+1)\Theta^T(k)\Delta C^T(k+1)K_p^T(k+1)+ \\
& +K_p(k+1)C(k+1)\Theta^T(k)\Delta A^T(k+1)- \\
& -K_p(k+1)C(k+1)\Theta^T(k)\Delta C^T(k+1)K_p^T(k+1)+ \\
& +\Delta A(k+1)q(k)U^T(k+1)\Delta B^T(k+1)- \\
& -\Delta B(k+1)U(k+1)q(k)\Delta C^T(k+1)K_p^T(k+1)+ \\
& +\Delta B(k+1)U(k+1)q^T(k)\Delta A^T(k+1)- \\
& -K_p(k+1)\Delta C(k+1)q^T(k)U^T(k+1)\Delta B^T(k+1)- \\
& -A(k+1)m(k)U^T(k+1)\Delta B^T(k+1)+ \\
& +K_p(k+1)C(k+1)m(k)U^T(k+1)\Delta B^T(k+1)- \\
& -\Delta B(k+1)U(k+1)m^T(k)A^T(k+1)+ \\
& +\Delta B(k+1)U(k+1)m^T(k)C^T(k+1)K_p^T(k+1)+ \\
& -\hat{Q}(k+1)+K_p(k+1)\hat{R}(k+1)K_p^T(k+1)-\hat{Q}_R(k+1)K_p^T(k+1)- \\
& -K_p(k+1)\hat{Q}_R^T(k+1)+\Delta B(k+1)U(k+1)U^T(k+1)\Delta B^T(k+1)- \\
& -m(k+1/k)m^T(k+1/k),
\end{aligned}
$$

$$\Theta(k+1/k)=E\left[X(k+1)\bar{X}^T(k+1/k)\right]=\hat{A}(k+1)\Theta(k)A^T(k+1)-$$
$$-\hat{A}(k+1)\Theta(k)C^T(k+1)K_p^T(k+1)-\hat{A}(k+1)\Psi(k)\Delta A^T(k+1)+$$
$$+\hat{A}(k+1)\Psi(k)\Delta C^T(k+1)K_p^T(k+1)-$$
$$-\hat{A}(k+1)q(k)U^T(k+1)\Delta B^T(k+1)-$$
$$-\hat{B}(k+1)U(k+1)q^T(k)\Delta A^T(k+1)+$$

$$+\hat{B}(k+1)U(k+1)q^T(k)\Delta C^T(k+1)K_p^T(k+1)+$$
$$+\hat{B}(k+1)U(k+1)m(k)A^T(k+1)-$$
$$-\hat{B}(k+1)U(k+1)m(k)\Delta C^T(k+1)K_p^T(k+1)-$$
$$-\hat{B}(k+1)U(k+1)U^T(k+1)\Delta B^T(k+1)+\hat{Q}(k);$$

$$\Theta(k+1)=E\left[X(k+1)\bar{X}^T(k+1)\right]=\Theta(k+1/k)\left[I-K(k+1)C(k+1)\right]^T+$$
$$+\Psi(k+1)\Delta C^T(k+1)K^T(k+1);$$

$$\Psi(k+1)=E[X(k+1)X^T(k+1)]=\hat{A}(k+1)\Psi(k)\hat{A}^T(k+1)+$$
$$+\hat{A}(k+1)q(k)U^T(k+1)\hat{B}^T(k+1)+$$
$$+\hat{B}(k+1)U(k+1)q^T(k)\hat{A}^T(k+1)+$$
$$+\hat{B}(k+1)U(k+1)U^T(k+1)\hat{B}^T(k+1);$$

$$m(k+1|k)=A(k+1)m(k)-K_p(k+1)C(k+1)m(k)-\Delta A(k+1)q(k)+$$
$$+K_p(k+1)\Delta C(k+1)q(k)+\Delta B(k+1)U(k+1);$$

$$m(k+1)=\left[I-K(k+1)C(k+1)\right]A(k+1)m(k)-$$
$$-\left[I-K(k+1)C(k+1)\right]K_p(k)C(k)+$$
$$+\left\{K(k+1)\left[\Delta C(k+1)A(k+1)+C(k+1)\Delta A(k+1)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\Delta C(k+1)\Delta A(k+1)-\Delta A(k+1)\right]\right\}q(k)+$$
$$+\left[K(k+1)C(k+1)B(k+1)-\hat{C}(k+1)\hat{B}(k+1)-\Delta B(k+1)\right]U(k+1);$$

$$q(k+1)=\hat{A}(k+1)q(k)+\hat{B}(k+1)U(k+1).$$

Дисперсії похибок оцінки компонент вектора стану є діагональними елементами коваріаційної матриці $\hat{P}(k+1)$ похибок ФК. Для того щоб обчислити значення цієї матриці при наявності похибок (5), необхідно розв'язати систему матричних рівнянь з урахуванням корельованості $W(k)$ і $V(k)$, та наявності детермінованої функції часу у векторі вимірювання.

## Висновки

Аналізуючи одержані результати, можна зробити висновок, що даний алгоритм може бути корисним при створенні інтегрованих навігаційних систем, комплексна обробка інформації в яких базується на алгоритмах оцінювання калманівського типу. В роботі авторами представлено узагальнений алгоритм, який дає можливість досліджувати чутливість алгоритму ФК до неточності задання параметрів математичної моделі з урахуванням наявності у вихідному сигналі системи детермінованої в часі функції та корельованості шумів вимірювання та шумів зовнішніх збурень.

## Список використаної літератури

1. .Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. Леондеса К.Т. - М.: Связь, 1973. - 408 с.
2. *Бабич О. А.* Обработка информации в навигационных комплексах. - М.: Машиностроение, 1991. - 512 с.
3. *Чернодаров А. В., Коженков Л. Ю., Сорокин Г. В., Коврегин В. Н.* Интегрированная обработка информации в бесплатформенных инерциально-спутниковых системах навигации и ориентации маневренных летательных аппаратов // IV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. - 1997.- С.41-51.
4. *Браммер Л., Зифлинг Г.* Фильтр Калмана-Бьюси.- М.: Наука, 1982. – 200 с.
5. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. - М.: Мир, 1984. - 720 с.