

## **ОПТИМІЗАЦІЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ВИДОВЖЕНОЇ БАЛКОВОЇ СИСТЕМИ**

### **Вступ**

Ця стаття є продовженням наукових досліджень викладених в роботах [1–3]. В цій роботі розглянуто підхід щодо оптимізації внутрішньої структури видовжених балкових систем, а саме, викладено новий метод для визначення оптимального розміщення її внутрішніх силових елементів. Пропонується задавати положення координат розміщення внутрішніх силових підкріплюючих елементів видовженої гнучкої балкової системи, використовуючи аналітичні функції на прикладі крила літального апарату (КЛА) з подальшим визначенням інерційних, жорсткісних характеристик і знаходження характеристик напружено–деформованого стану (НДС) на основі розв’язку відповідних деформаційних рівнянь балкової системи. На основі варіаційних принципів механіки виводяться рівняння згінних, крутильних та повздовжніх переміщень крила літального апарату (ЛА), при цьому враховуються внутрішня структура КЛА та зовнішнє аеродинамічне навантаження, яке на нього діє. Це дозволяє в подальшому провести внутрішню структурну оптимізацію з метою проектування конструкції крила, яке буде мати покращені міцнісні та деформаційні характеристики.

### **Постановка задачі**

Розглядається задача задання розміщення внутрішніх елементів видовжених балкових систем, що мають складну внутрішню структуру та зовнішню геометрію, використовуючи аналітичний підхід. Подальший розв’язок деформаційних рівнянь руху дозволить визначити оптимальну структуру розміщення внутрішніх елементів розглядуваної системи з метою покращення її кінематичних характеристик.

### **Завдання внутрішньої структури видовженої балкової системи**

Розглянемо поперечний переріз видовженої балкової системи (БС) на прикладі крила літального апарату.

Будемо вважати, що заштриховані області на рис. 1 є областями розміщення підкріплюючих силових елементів (ПЕ), наприклад, стрингерів та лонжеронів в поперечному перерізі крила ЛА. Система

координат  $c_0x_0y_0$  має своїм початком передню кромку поперечного перерізу, її вісь  $c_0x_0$  направлена по довжині хорди поперечного перерізу КЛА, початок системи координат  $sxy$  збігається з центром мас вище розглядуваного поперечного перерізу.

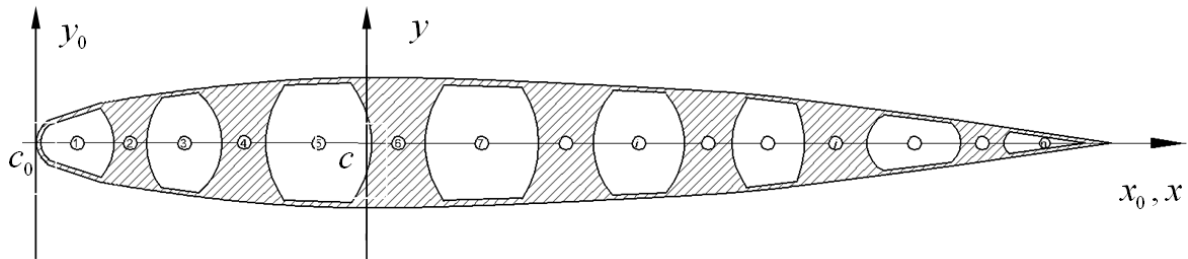


Рис. 1. Поперечний переріз БС

Позначимо довжину незаштрихованих областей  $1...n$  вздовж координат  $x, x_0$  як  $\Delta_1... \Delta_n$  відповідно. Розподіл внутрішніх підкріплюючих елементів (положення їх центрів мас) вважаємо рівномірним, тоді координату  $x$  кожного ПЕ будемо визначати згідно наступних формул

$$x_n = \Delta_1 + \delta(n-1), \quad (1)$$

де

$$\delta = \frac{b - \Delta_1 - \Delta_n}{n-1}, \quad n - \text{кількість ПЕ в розглядуваному перерізі КЛА,}$$

$b$  - довжина хорди КЛА.

Ординату центру мас відповідного ПЕ можна визначити, знаючи аналітичну функцію  $y(x)$ , що описує контур перерізу КЛА – його аеродинамічний профіль. Наприклад, для перерізу КЛА, представленого на рис.2, така функція матиме вигляд [2]

$$y = \frac{t}{0.2} (0.2970439\sqrt{x} - 0.1237438 \cdot x - 0.3561x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4). \quad (2)$$

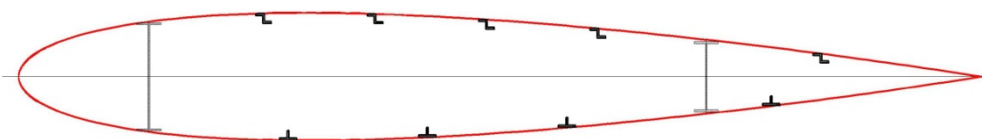


Рис. 2. Поперечний переріз КЛА з розміщенням силових елементів

### Визначення зведених характеристик поперечного перерізу

Основне концептуальне положення полягає в тому, що тут БС трактується як деяке порожнисте (скелетне) просторове тіло з

неоднорідного матеріалу зі змінними по довжині інерційними та жорсткісними характеристиками. Вздовж розмаху БС профілі її поперечних перерізів вважаємо подібними. Для формулювання характеристик НДС і методів розрахунку пропонується використовувати підходи просторової теорії пружності однорідних і неоднорідних матеріалів.

Як зазначалося раніше, БС розглядаємо як крило літака. В дослідженнях здійснюється зведення задачі про динаміку крила ЛА до задачі деформування консольної балки. Балка має зведені механічні характеристики в припущенні, що в ній виникають взаємозв'язані поздовжні згинні і крутильні переміщення.

Розглянемо системи відліку в КБС, які вказані на рис. 3. За початок системи відліку вибираємо точку  $C$  – центр мас контуру кореневого перерізу розглядуваної КБС.

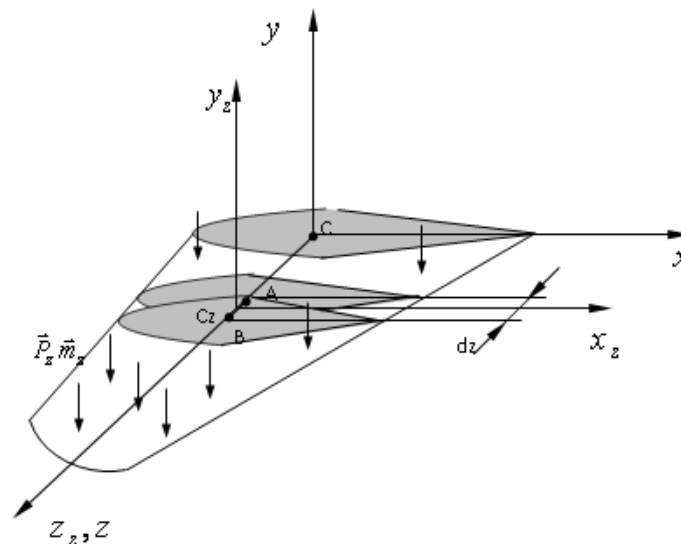


Рис. 3. Системи відліку в БС

В кореновому перерізі вибираємо в центрі мас (точка  $C$ ) початок системи координат  $Czxy$ , яку називаємо кореневою системою; вісь  $Cy$  направляємо вертикально вгору, а  $Cz$  направляємо по довжині балки. Цю систему обираємо за інерціальну при рівномірному і прямолінійному русі основи (перерізу  $z = 0$ ).

Треба зазначити, що конфігурація  $C_0$  описує недеформований стан системи, а конфігурація  $C_i$  – деформований [1–3].

В недеформованому стані в довільному перерізі БС вибираємо локальну систему відліку  $C_z x_z y_z z_z$ . Орти кореневої системи координат позначаємо через  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  а локальної через  $\vec{i}_z, \vec{j}_z, \vec{k}_z$ . Величини, які відносяться до деформованого стану, будемо позначати “\*”.

Систему відліку  $C_z x y$  можна вважати інерціальною, коли основа здійснює рівномірний прямолінійний рух. В іншому випадку (при прискореному русі) це буде неінерціальна система.

Виріжемо нормальними до осі  $C_z$  перерізами елемент КБС. Вісь  $C_z$  проводимо через центри мас контурів поперечних перерізів КБС.

Головний вектор зусиль, який прикладається до точок осі  $C_z$ , як і раніше позначимо через  $\vec{T}^Z$ . Вектор  $\vec{T}^Z$  виникає за рахунок внутрішніх напружень в перерізах; відповідний момент позначаємо через  $\vec{M}_{C_z}$ .

Зазначені інтегральні силові характеристики від дії зовнішнього навантаження позначимо через  $\vec{P}_Z$ , а моменти – через  $\vec{m}_Z$  і будемо визначати їх згідно з [5].

Розглянемо довільну точку  $M^*$  перерізу в  $C_t$ , яка належить його матеріальній частині,  $\vec{\sigma}^z$  – вектор напруження, що прикладається в точці  $M^*$ . Розкладемо вектор  $\vec{\sigma}^z$  на наступні складові

$$\vec{\sigma}^z = \sigma_{zz}^* \vec{k}_z + \sigma_{zx}^* \vec{i}_z + \sigma_{zy}^* \vec{j}_z.$$

Вказані напруження виразимо головним вектором і головним моментом від їх дії, а за центр зведення обираємо центр мас перерізу (точку  $C_z$ , множина яких формує вісь центрів мас КЛА). Тоді головний вектор і головний момент від дії вказаних напружень будуть мати наступний вигляд

$$\vec{T}^z = \int_{\Omega_z} \vec{\sigma}^z d\Omega_z, \quad \vec{M}^z = \int_{\Omega_z} \vec{\rho}_z \times \vec{\sigma}^z d\Omega_z.$$

де  $\vec{\rho}_z = x_z \vec{i}_z + y_z \vec{j}_z$  – радіус вектор точки  $M^*$  з початком в  $C_z$ .

Повні вирази для головного вектора та головного моменту наведені в роботі [1].

Головний вектор і момент можна представити у вигляді проєкцій на відповідні орти зв'язаної з КЛА системи координат  $C_z x y z$ , при цьому вісь  $C_z z$  направляємо по розмаху КЛА

$$\vec{T}^z = N^* \vec{k}_z + Q_2^* \vec{j}_z + Q_1^* \vec{i}_z, \quad \vec{M}_{C_z} = \vec{M}_k^* \vec{k}_z + \vec{M}_1^* \vec{i}_z + \vec{M}_2^* \vec{j}_z.$$

Позначимо через

$\vec{U} = U_1(x, y, z, t)\vec{i} + U_2(x, y, z, t)\vec{j} + U_3(x, y, z, t)\vec{k}$  - вектор переміщення довільної точки розглядуваної БС, яку вважаємо просторовим тілом.

Пропонується компоненти  $U_i$  апроксимувати наступним чином [2]

$$U_1 = v_0 + \sum_{i+j \geq 1}^N c_{ij}(z)x^i y^j, \quad U_2 = w_0 + \sum_{i+j \geq 1}^N b_{ij}(z)x^i y^j, \quad U_3 = u_0 + \sum_{i+j \geq 1}^N a_{ij}(z)x^i y^j.$$

Для визначення шуканих функцій  $u_0(z, t)$ ,  $w_0(z, t)$ ,  $b_1(z, t)$ , ..., які описують переміщення розглядуваного перерізу КЛА, необхідно сформулювати граничні і початкові умови та скласти відповідні рівняння руху. В ці рівняння будуть входити приведені характеристики поперечного перерізу КЛА, які виражаються наступними формулами

$$\begin{aligned} N^*(\Delta, \delta) &= A(\Delta, \delta) \frac{\partial u_0}{\partial z} - B(\Delta, \delta) \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}, \quad Q_2^*(\Delta, \delta) = \frac{\partial b_1}{\partial z} F(\Delta, \delta), \\ M_k^*(\Delta, \delta) &= \frac{\partial b_1}{\partial z} C(\Delta, \delta), \quad M_1^*(\Delta, \delta) = B(\Delta, \delta) \frac{\partial u_0}{\partial z} - D(\Delta, \delta) \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} A &= E^{*m} \Omega_{z.обшивки.} + \sum_{m=1}^l (E^{*m} \Omega_{z.m.}), \\ B &= E^{*m} I_{x.обшивки.} + \sum_{m=1}^l (E^{*m} I_{x.m.}(\Delta, \delta)), \quad C = \mu^m J_{y.обшивки.} + \sum_{m=1}^l (\mu^m J_{y.m.}(\Delta, \delta)), \\ D &= E^{*m} J_{x.обшивки.} + \sum_{m=1}^l (E^{*m} J_{x.m.}(\Delta, \delta)), \quad F = \mu^m I_{y.обшивки.} + \sum_{m=1}^l (\mu^m I_{y.m.}(\Delta, \delta)). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут через позначення  $E^{*m}$ ,  $\mu^m$ ,  $\Omega_z^m$  введено відповідно модулі пружності першого і другого роду та площа деякого  $n$  – того підкріплюючого силового елемента або обшивки КЛА; а через  $I_{x.n.}(\Delta, \delta)$ ,  $J_{y.n.}(\Delta, \delta)$  – статичний момент та момент інерції, як функції від параметрів розташування в середині перерізу відповідного  $n$  – ого ПЕ КЛА.

Вирази (3) отримані з використанням узагальненого закону Гука та формул Коші [7], що виражають взаємозв'язок між характеристиками напружено-деформованого стану та компонентами вектора переміщень довільної точки поперечного перерізу КЛА [1].

Використання виразів (3) дає можливість в подальшому виражати внутрішні сили та моменти характеристики від дії напружень в конкретному поперечному перерізі крила, враховуючи при цьому його внутрішню структуру.

В роботі [1] розглянуто методику розрахунку зведених характеристик  $A, B, C, F, H$ , які виражаються виразами (3).

### Рівняння руху крила літального апарату

Для виведення рівнянь руху КБС застосуємо до розглядуваної системи принцип можливих переміщень (ПМП), що має наступний вигляд [6]

$$\int_0^l \left( -\frac{\partial \vec{T}^z}{\partial z} - \vec{P}_z + \rho^* \frac{\partial^2 \vec{u}_0}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \vec{u}_0 dz + \int_0^l \left( -\frac{\partial \vec{M}_{Cz}}{\partial z} - \vec{m}_z - \vec{k}_z^* \times \vec{T}^z + \frac{\partial}{\partial t} \vec{K}_{Cz} \right) \cdot \delta \vec{\Omega} dz +$$

$$\left( \vec{r}_{Cz}^* \times \vec{T}^z \right) \cdot \delta \vec{\Omega} \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\partial}{\partial z} \left( \vec{T}^z \cdot \delta \vec{u}_0 \right) dz + \int_0^l \frac{\partial}{\partial z} \left( \vec{M}_{Cz} \cdot \delta \vec{\Omega} \right) dz - \vec{F}_0 \cdot \delta \vec{u}_0 \Big|_{z=0} - \vec{F}_L \cdot \delta \vec{u}_0 \Big|_{z=L} -$$

$$\vec{M}_0 \cdot \delta \vec{\Omega}_0 \Big|_{z=0} - \vec{M}_L \cdot \delta \vec{\Omega}_0 \Big|_{z=L} = 0.$$

Визначаємо скалярний вигляд для ПМП. Представляємо всі силові фактори (моменти, зусилля) розкладом через фізичні (реальні) компоненти, які відносяться до деформованого стану. Дана процедура ускладнюється тим фактором, що орти  $\vec{i}^*, \vec{j}^*, \vec{k}^*$  в загальному випадку не ортогональні. Тому при обчисленні скалярного добутку будемо діяти наступним чином: силові фактори спочатку визначаємо через фіктивні зусилля, тобто ті, які відносяться до площадок недеформованого стану, а при представленні до реальних фізичних величин (деформований стан) використаємо матрицю напрямних косинусів між базисами деформованого  $\vec{i}^*, \vec{j}^*, \vec{k}^*$  та недеформованого  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  станів. Ця матриця була визначена в [2] і має вигляд, наведений в таблиці 1.

**Таблиця 1.**

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}_z^*$	$1 + c_1$	$b_1$	$-\frac{\partial v_0}{\partial z}$
$\vec{j}_z^*$	$-b_1$	$1 + b_2$	$-\frac{\partial w_0}{\partial z}$

$\vec{k}_z^*$	$\frac{\partial v_0}{\partial z}$	$\frac{\partial w_0}{\partial z}$	$1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}$
---------------	-----------------------------------	-----------------------------------	---------------------------------------

В свою чергу, реальні фізичні величини в подальшому будемо представляти через похідні від переміщень.

Приймаючи все це до уваги, представимо розклади фізичних величин (силових ) факторів у деформованому та недеформованому базисах у вигляді

$$\begin{aligned}\vec{T}^z &= N^* \vec{k}_z^* + Q_2^* \vec{j}_z^* = N \vec{k}_z + Q_2 \vec{j}_z, \\ \vec{p}_z &= p_{z,z}^* \vec{k}_z^* + p_{z,y}^* \vec{j}_z^* = p_{z,z} \vec{k}_z + p_{z,y} \vec{j}_z, \\ \vec{M}_{Cz} &= M_k^* \vec{k}_z^* + M_1^* \vec{i}_z^* = M_k \vec{k}_z + M_1 \vec{i}_z, \\ \vec{m}_z &= m_{z,z}^* \vec{k}_z^* + m_{z,x}^* \vec{i}_z^* = m_{z,z} \vec{k}_z + m_{z,x} \vec{i}_z.\end{aligned}$$

Вектор переміщень  $\vec{u}_0$  та вектор кутової швидкості  $\vec{\Omega}_0$  елемента крила, а також їх компоненти, які були визначені в [2], представляємо наступним чином

$$\vec{u}_0 = u_0 \vec{k}_z + w_0 \vec{j}_z, \vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}, \vec{\Omega} = \left( -\frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_1}{\partial z} x \right) \vec{i} + b_1 \vec{k}.$$

Для переходу від реальних до фіктивних фізичних величин застосуємо матрицю напрямних косинусів (табл. 1) і тоді маємо

$$\begin{aligned}N &= \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) N^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} Q_2^*, \quad Q_2 = \frac{\partial w_0}{\partial z} N^* + (1 + b_2) Q_2^*, \\ p_{z,z} &= \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) p_{z,z}^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,y}^*, \quad p_{z,y} = \frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,z}^* + (1 + b_2) p_{z,y}^*, \\ M_k &= \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) M_k^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} M_1^* \approx M_k^* \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right), \quad M_1 = (1 + c_1) M_1^* + \frac{\partial v_0}{\partial z} M_k^* \approx M_1^* (1 + c_1), \\ m_{z,z} &= \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) m_{z,z}^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} m_{z,x}^* \approx m_{z,z}^* \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right), \quad m_{z,x} = (1 + c_1) m_{z,x}^* + \frac{\partial v_0}{\partial z} m_{z,z}^* \approx m_{z,x}^* (1 + c_1).\end{aligned}$$

Компоненти, що описують зовнішнє аеродинамічне навантаження  $p_{z,z}, p_{z,y}, m_{z,x}, m_{z,z}$  будемо використовувати у вигляді формул, що наведені в роботі [5].

Запишемо вираз для ПМП у скалярному вигляді [6]

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left[ \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \left( A \frac{\partial u_0}{\partial z} - B \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial w_0}{\partial z} F \frac{\partial b_1}{\partial z} \right] \frac{\partial}{\partial z} \delta u_0 dz + \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) \left( A \frac{\partial u_0}{\partial z} - B \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} \right) - (1 + b_1) F \frac{\partial b_1}{\partial z} \right] \frac{\partial}{\partial z} \delta w_0 dz + \\
& \int_0^l \left[ \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) p_{z,z}^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,y}^* \right] \delta u_0 dz + \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) p_{z,z}^* - (1 + b_1) p_{z,y}^* \right] \delta w_0 dz + \int_0^l \rho^* \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \delta u_0 dz + \int_0^l \rho^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} \delta w_0 dz + \\
& \int_0^l \left[ \left( B \frac{\partial u_0}{\partial z} - D \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} \right) (1 + c_1) \frac{\partial}{\partial z} \delta \left( -\frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_1}{\partial z} x \right) \right] dz + \int_0^l C \frac{\partial b_1}{\partial z} \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} \delta b_1 dz + \int_0^l m_{z,z}^* \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \delta b_1 dz + \\
& \int_0^l m_{z,x}^* (1 + c_1) \delta \left( -\frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_1}{\partial z} x \right) dz + \int_0^l \left[ \frac{\partial w_0}{\partial z} \left( \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \left( A \frac{\partial u_0}{\partial z} - B \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial w_0}{\partial z} F \frac{\partial b_1}{\partial z} \right) - \right. \\
& \left. \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial w_0}{\partial z} \left( A \frac{\partial u_0}{\partial z} - B \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} \right) - (1 + b_1) F \frac{\partial b_1}{\partial z} \right) \right] \delta \left( -\frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_1}{\partial z} x \right) dz + \\
& \int_0^l \frac{\partial v_0}{\partial z} \left[ \frac{\partial w_0}{\partial z} \left( A \frac{\partial u_0}{\partial z} - B \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial w_0}{\partial z} F \frac{\partial b_1}{\partial z} \right] \delta b_1 dz + \int_0^l \left[ J_z^z \frac{\partial^2 b_1}{\partial t^2} + J_{zx}^z \left( -\frac{\partial^3 w_0}{\partial z \partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 b_1}{\partial z \partial t^2} x \right) \right] \delta b_1 dz + \\
& \int_0^l \left[ J_x^z \left( -\frac{\partial^3 w_0}{\partial z \partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 b_1}{\partial z \partial t^2} x \right) - J_{zx}^z \frac{\partial^2 b_1}{\partial t^2} \right] \delta \left( -\frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_1}{\partial z} x \right) dz + \\
& (-N \delta u_0 - Q_2 \delta w_0) \Big|_{z=0} + (F_{0x} \delta u_0 + F_{0z} \delta w_0) \Big|_{z=0} + (N \delta u_0 + Q_2 \delta w_0) \Big|_{z=l} - (F_{lx} \delta u_0 + F_{lz} \delta w_0) \Big|_{z=l} + \\
& \left( -\left( B \frac{\partial u_0}{\partial z} - D \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} \right) (1 + c_1) \frac{\partial}{\partial z} \delta \left( -\frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_1}{\partial z} x \right) - C \frac{\partial b_1}{\partial z} \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \delta b_1 \right) \Big|_{z=0} + \\
& \left( M_{0x} \delta \left( -\frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_1}{\partial z} x \right) + M_{0z} \delta b_1 \right) \Big|_{z=0} + \left( \left( B \frac{\partial u_0}{\partial z} - D \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} \right) (1 + c_1) \frac{\partial}{\partial z} \delta \left( -\frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_1}{\partial z} x \right) + C \frac{\partial b_1}{\partial z} \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \delta b_1 \right) \Big|_{z=l} - \\
& \left( M_{lx} \delta \left( -\frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_1}{\partial z} x \right) + M_{lz} \delta b_1 \right) \Big|_{z=l} = 0.
\end{aligned}$$

Для проведення конкретних обчислень деформацій крила ЛА вибираємо апроксимації, які наведені в працях Келдиша М.В. [4]

- для кручення:  $b_1(z, t) = b_1(t) \gamma_1(z)$ , де:  $\gamma_1(z) = \sin\left(\pi \frac{z}{2l}\right)$ ,  $l=1$ ; (6)
- для прогину:  $w_0(z, t) = c_1(t) \psi_1(z)$ , де  $\psi_1(z) = p_1 z^4 + q_1 z$ ,  $p_1=0,15$ ,  $q_1=1$ .

На основі скалярного ПМП після проведення громіздких обчислень одержимо злічені множини систем звичайних диференціальних (в загальному випадку) нелінійних рівнянь для визначення амплітудних коефіцієнтів, на основі яких можна розраховувати різні динамічні характеристики досліджуваної складної динамічної системи. При цьому розрахунки можна проводити при довільних граничних умовах, динамічних навантаженнях, різних значеннях вхідних параметрів і функцій. Переміщеннями БС в площині  $z0y$  будемо нехтувати з урахуванням великої жорсткості БС в цьому напрямку.

Тоді



$$\begin{aligned}
& A_1(z, \delta, \Delta) \ddot{a}_1(t) + B_1(z, \delta, \Delta) a_1(t) + C_{11}(z, \delta, \Delta) c_1(t) + C_{12}(z, \delta, \Delta) c_2(t) + P_1 + G_1 = 0, \\
& A_{21}(z, \delta, \Delta) \ddot{c}_1(t) + B_{21}(z, \delta, \Delta) c_1(t) a_1(t) + B_{22}(z, \delta, \Delta) c_1(t) + B_{23}(z, \delta, \Delta) c_1^2(t) + A_{22}(z, \delta, \Delta) \ddot{c}_2(t) + \\
& + B_{24}(z, \delta, \Delta) c_2(t) a_1(t) + B_{25}(z, \delta, \Delta) c_2(t) + B_{26}(z, \delta, \Delta) c_2^2(t) - B_{27}(z, \delta, \Delta) c_1(t) c_2(t) + \\
& + B_{28}(z, \delta, \Delta) 2b_1(t) c_1(t) c_2(t) + C_{21}(z, \delta, \Delta) \ddot{b}_1(t) + C_{22}(z, \delta, \Delta) b_1(t) - C_{23}(z, \delta, \Delta) a(t)_1 + P_{21} + G_{21} = 0, \\
& A_{31}(z, \delta, \Delta) \ddot{c}_1(t) + B_{31}(z, \delta, \Delta) c_1(t) a_1(t) + B_{32}(z, \delta, \Delta) c_1(t) + B_{33}(z, \delta, \Delta) c_1^2(t) + A_{32}(z, \delta, \Delta) \ddot{c}_2(t) + \\
& + B_{34}(z, \delta, \Delta) c_2(t) a_1(t) + B_{35}(z, \delta, \Delta) c_2(t) + B_{36}(z, \delta, \Delta) c_2^2(t) - B_{37}(z, \delta, \Delta) c_1(t) c_2(t) + \\
& + B_{38}(z, \delta, \Delta) 2b_1(t) c_1(t) c_2(t) + C_{31}(z, \delta, \Delta) \ddot{b}_1(t) + C_{32}(z, \delta, \Delta) b_1(t) - C_{33}(z, \delta, \Delta) a(t)_1 + P_{31} + G_{31} = 0, \\
& A_4(z, \delta, \Delta) \ddot{b}_1(t) + B_4(z, \delta, \Delta) b_1(t) + C_{41}(z, \delta, \Delta) \ddot{c}_1(t) + C_{42}(z, \delta, \Delta) \ddot{c}_2(t) + P_{41} a_1(t) + P_{42} + G_4 = 0. \quad (7)
\end{aligned}$$

Для подальших аналітичних обчислень розглянемо спрощений лінійний варіант системи згинно–крутильних переміщень (коливаний) КЛА дволонжеронної схеми

$$\begin{aligned}
& A_{21}(z, \delta, \Delta) \ddot{c}_1(t) + B_{22}(z, \delta, \Delta) c_1(t) + B_{23}(z, \delta, \Delta) c_1^2(t) + \ddot{b}_1(t) + C_{22}(z, \delta, \Delta) b_1(t) + P_{21} = 0 \\
& A_4(z, \delta, \Delta) \ddot{b}_1(t) + B_4(z, \delta, \Delta) b_1(t) + C_{41}(z, \delta, \Delta) \ddot{c}_1(t) + P_{42} = 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

Після проведення громіздких аналітичних перетворень та ряду спрощень розв'язків (8) одержуємо наступні вирази для обчислення прогинів та кутів закручування, які є функціями від  $(z, \delta, \Delta, t)$ :

$$\begin{aligned}
c_1(\delta, \Delta, t) &= -\frac{P_{21}}{B_{22}(\delta, \Delta)} + C_1 \cos(\omega_w(\delta, \Delta)t) + C_2 \sin(\omega_w(\delta, \Delta)t), \\
b_1(\delta, \Delta, t) &= e^{\sqrt{-\omega_{b_1}^2(\delta, \Delta) - \frac{P_{42}}{A_4(\delta, \Delta)}} t} C_3 + e^{-\sqrt{-\omega_{b_1}^2(\delta, \Delta) - \frac{P_{42}}{A_4(\delta, \Delta)}} t} C_4, \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\text{де } \omega_w(\delta, \Delta) = \sqrt{\frac{B_{22}(\delta, \Delta)}{A_{21}(\delta, \Delta)}}, \quad \omega_{b_1}(\delta, \Delta) = \sqrt{\frac{B_4(\delta, \Delta)}{A_4(\delta, \Delta)}} - \text{ власні частоти}$$

КЛА на згин та кручення відповідно.

При нульових початкових умовах вирази (9) приймають наступний вигляд

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{P_{21}}{B_{22}(\delta, \Delta)}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \\
c_1(\delta, \Delta, t) &= \frac{P_{21}}{B_{22}(\delta, \Delta)} [\cos(\omega_w(\delta, \Delta)t) - 1], \quad b_1(\delta, \Delta, t) = 0. \quad (10)
\end{aligned}$$

Таким чином, визначивши мінімум функції  $c_1(\delta, \Delta)$ , який, в свою чергу, буде гарантувати мінімум прогину КЛА, та використовуючи це в подальшому, можемо визначити оптимальне розміщення ПЕ в поперечному перерізі КЛА, яке згідно з виразами (4, 6) буде визначатися параметрами  $\delta, \Delta$ .

З рис. 4 бачимо, що  $B_{22}(\Delta)$  приймає максимальне значення при  $\Delta = 0,2994$ .

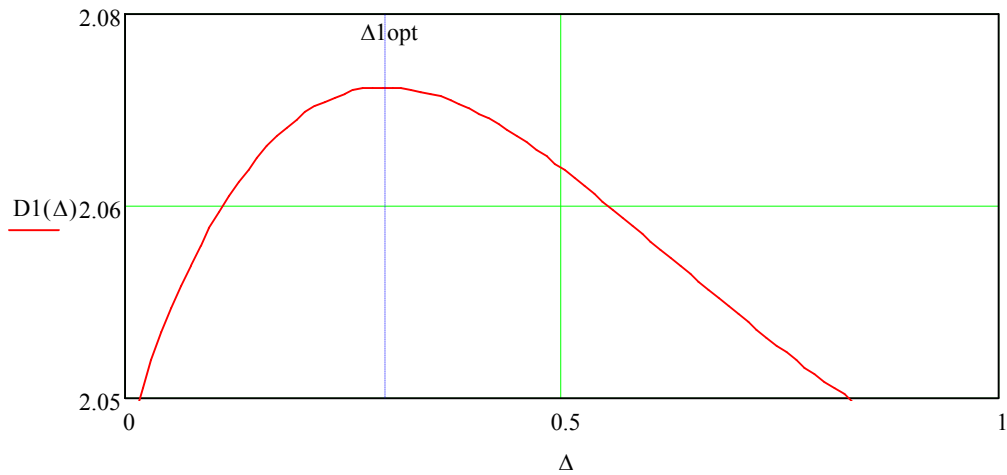


Рис. 4.  $B_{22}(\Delta)$  для КЛА дволонжеронної схеми

Обчислення прогинів  $c_1(t)$  згідно з (10) будемо проводити для наступних значень  $\Delta = (0,15; 0,2994)$ . Результати відповідних обчислень наведені на рис. 5.

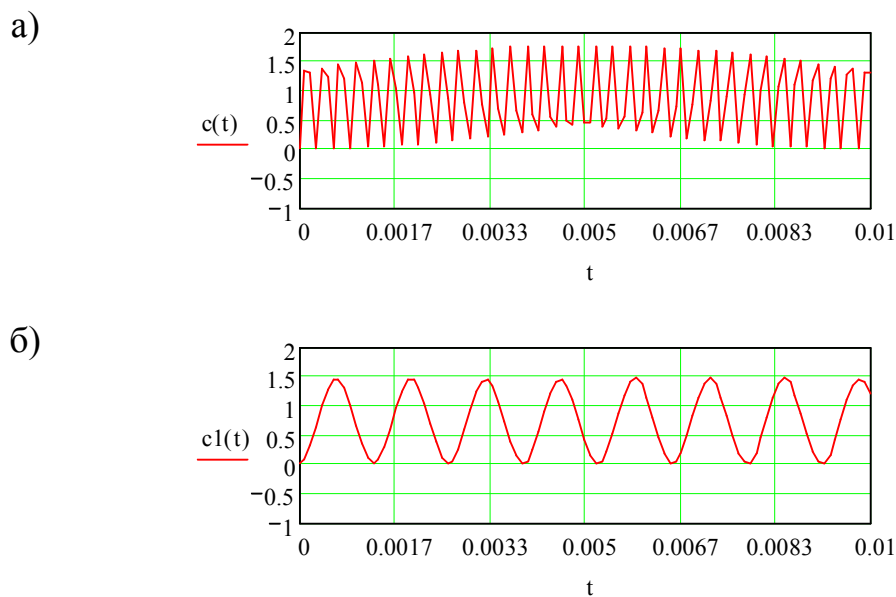


Рис. 5. Обчислення прогинів  $c_1(t)$ : а)  $\Delta = 0,15$ ; б)  $\Delta = 0,2994$

Таким чином, проведені дослідження дозволяють проводити обчислення, що мають за мету забезпечити оптимізацію внутрішньої структури видовженої балкової конструкції, що, в свою чергу, в якості результату, забезпечує мінімізацію інтегральних деформаційних характеристик.

## Висновки

Розв'язана задача оптимального розміщення внутрішніх елементів видовжених балкових систем, що мають складну внутрішню структуру та зовнішню геометрію. На основі розв'язків деформаційних рівнянь руху визначене оптимальне розміщення внутрішніх елементів видовженої консольної балкової системи на прикладі КЛА дволонжеронної схеми.

Оптимальне розміщення внутрішніх підкріплюючих силових елементів забезпечує максимальну жорсткість при згині КЛА та мінімальні прогини, що зумовлені дією зовнішнього навантаження.

В подальших роботах на основі обчислення параметрів навантаження кожного окремо виділеного конструктивно-силового елемента буде проведений аналіз їх напружено-деформованого стану.

## Список використаної літератури

1. *Мариношенко О.П., Папіжук О.В.* Розробка методу розрахунку інерційних та приведених жорсткісних характеристик крила літального апарату // *Механіка гіроскопічних систем*. К.: НТУУ "КПІ", випуск №19 – 2003. – С.65–76.
2. *Мариношенко О.П., Каюк Я.Ф.* Про один новий підхід до побудови характеристик напруженого і деформованого стану крил літаків// *IV Міжнародна науково-технічна конференція. "Гіротехнології, навігація, керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки"*. – Тези доповідей. – 2003. – С.148–156.
3. *Мариношенко О.П., Папіжук О.В.* Математична модель деформування крила літального апарату // *Інформаційні системи, механіка та керування*. К.: НТУУ "КПІ", випуск №1 – 2008. – С.89–98
4. *Келдыш М.В.* Избранные труды: Механика.–М.: Наука, 1985. 568с.
5. *Канченко В.Я., Каюк Я.Ф., Мариношенко О.П.* Визначення аеродинамічного навантаження на симетричний профіль крила літального апарату Зб. праць інституту математики НАН України// *Сучасні проблеми аналітичної механіки*. – 2008.–т.5, №2 С. 154–166.
6. *О.П.Мариношенко, Федоренко В.А.* Формування варіаційного співвідношення, типу принципу можливих переміщень (ПМП) стосовно задач динаміки крила. // *Технологические системы*. – 2004. – №3 – С.33–38.
7. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости.– М.: Гостехидат, 1948. – 212 с.

