

УДК: 534.1

В. Г. Савин, А. Э. Бабаев

ДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА НА ПЛОСКУЮ ЭЛЕКТРОУПРУГУЮ СИСТЕМУ ИЗ БИМОРФОВ

Введение

В различных отраслях техники широкое применение нашли материалы и конструкции, получившие за рубежом название «умные» (smart) структуры, которые чувствительны к внешним воздействиям [1]. Следует отметить, что их также называют «интеллектуальными» или «адаптивными». Пьезокерамические элементы являются идеальными «умными» структурами. Такие элементы могут быть выполнены в форме пластин, стержня, цилиндра или сферы. Они, благодаря прямому и обратному пьезоэффекту, используются в качестве приемников и излучателей упругих и акустических волн. Пьезокерамические элементы нашли широкое применение в системах шумоподавления (активной компенсации звука), а также, активной компенсации вибраций, в качестве систем предотвращения механических повреждений конструкций в результате критических внешних воздействий. Одной из таких структур [2] является набор биморфов, каждый из которых состоит из двух склеенных пластин – пьезокерамической и металлической. Одни из биморфов могут быть использованы в качестве приемников, а другие в качестве излучателей для компенсации нежелательных вибраций конструктивных элементов, на которых они установлены, или компенсации падающих акустических волн (активная компенсация звука). На данный момент существует множество различных биморфных структур. В частности, за счет использования в них цифрового сигнального процессора, они получили название – «умные биморфные цифровые структуры» [2]. Практическое использование биморфных элементов в режиме возбуждения электрическими импульсами или испытывающих действие нестационарных акустических волн делают актуальными исследования возникающих при этом переходных процессов. Качественное управление биморфами возможно только в случае понимания динамических процессов, происходящих в них, что, в свою очередь, невозможно без количественного описания характеристик этих процессов. Из имеющихся единичных публикаций по данной тематике отметим работы [2–6], анализ которых позволяет сделать вывод, что задача математического моделирования нестационарного взаимодействия биморфных пьезокерамических пластин с акустическими волнами к настоящему времени практически не решена.

Целью настоящей работы является математическая постановка и решение задачи падения акустических импульсов на периодически расположенные пьезокерамические биморфы.

Математическая постановка и решение задачи

Рассмотрим взаимодействие плоского акустического импульса с последовательно расположенными биморфными пьезокерамическими пластинами (рис. 1).

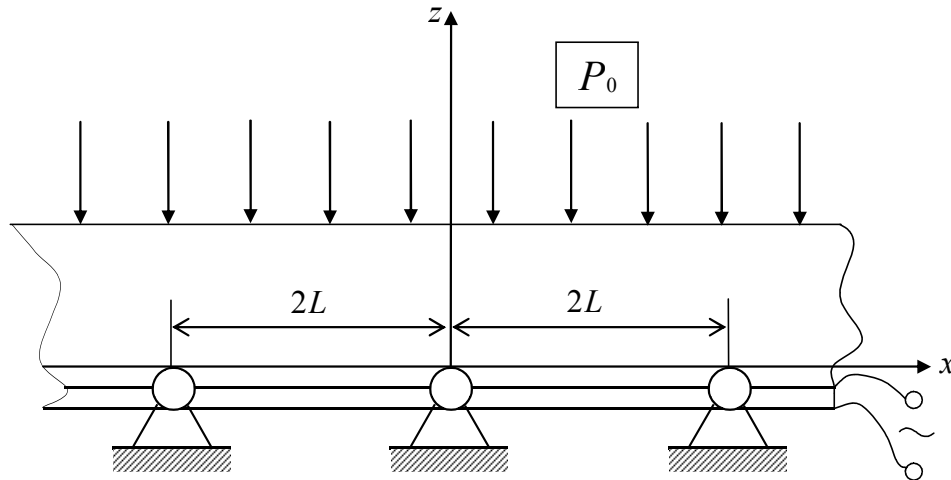


Рис. 1. Биморфные пьезокерамические пластины, контактирующие с жидкостью

Каждый из биморфов шарнирно оперт по контуру. Предполагается, что каждый биморф состоит из тонкостенных пьезокерамической и металлической пластинок, т.е. допускающим моделирование его движения уравнениями, основанной на кирхгофовой теории изгиба тонких пластин [7]. Пьезокерамическая пластинка с электродированными поверхностями поляризована по толщине, а электроды ее разомкнуты. Распространение возмущений в жидкой среде, заполняющей внешнее полупространство, описывается в рамках акустического приближения [8]. В момент времени $t = 0$ на биморфные элементы набегают нестационарная волна давления P_0 , потенциал скорости которой обозначим через Φ_0 .

При выбранных допущениях задача состоит в совместном интегрировании следующей системы уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$P = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \alpha_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \alpha_2 P|_{z=0}. \quad (3)$$

На границе контакта жидкости с биморфными элементами ($z = 0$) принимаются условия их безотрывного движения

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (4)$$

В местах шарнирного опирания торцов пластин ($x = 0, 2L, 4L, \dots$) граничными являются следующие условия

$$W = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Начальные условия выбраны нулевыми (до прихода падающей волны биморфные элементы находятся в состоянии покоя). В соотношениях (1) – (5) через W обозначена нормальная составляющая вектора перемещений биморфа (прогиб), Φ – потенциал скорости жидкости ($\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$), где Φ_1 – потенциал скорости отраженной волны, $P|_{z=0}$ – акустическое

давление на поверхности биморфа, $\alpha_1 = \frac{\rho c^2 (1M)^2}{D}$, $\alpha_2 = \frac{\gamma c^2 (1M)^2}{D}$,

где γ – плотность жидкости, c – скорость акустической волны в жидкости.

Эквивалентные параметры биморфа ρ, D представимы в виде:

$$\rho = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2; \quad D = \frac{1}{3} \left[E_2 h_2^2 + \frac{h_1^3}{S_{11}^E - \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T}} \right],$$

где ρ_k, h_k ($k=1,2$) – плотность и толщина пьезокерамической ($k=1$) и металлической ($k=2$) пластинок, соответственно,

E_2 – модуль Юнга металлической пластинки,

S_{11}^E – податливость пьезокерамической пластинки при постоянном электрическом поле,

d_{31} – пьезомодуль,

ϵ_{33}^T – диэлектрическая проницаемость электрического поля при постоянном механическом напряжении.

Математическая постановка задачи (1)–(5) приведена в безразмерных величинах, полученных делением L, h_1, h_2, W на 1м , t на $1\text{м}/c$, P на $\gamma \cdot c^2$, Φ на $1\text{м} \cdot c$.

При решении применяется интегральное преобразование Лапласа по времени с параметром преобразования s .

Приведем математическую постановку задачи, записанную в области изображений L

$$\frac{\partial^2 \Phi^L}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi^L}{\partial x^2} - \Phi^L \cdot s^2 = 0, \quad (6)$$

$$P^L = -\Phi^L \cdot s, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^4 W^L}{\partial x^4} + \alpha_1 W^L \cdot s^2 = \alpha_2 P^L|_{z=0}, \quad (8)$$

$$W^L_s = \frac{\partial \Phi^L}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (9)$$

Принимая во внимание периодичность рассматриваемой структуры вдоль оси x , потенциал Φ_1^L в области изображений представим в виде ряда Фурье по синусам, разложенным по нечетным гармоникам

$$\Phi_1^L(z, x, s) = \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{A_n^L(s)}{s} \sin(\delta_n x) e^{-\sqrt{\delta_n^2 + s^2} z}, \quad (10)$$

где $A_n^L(s)$ – неизвестные коэффициенты, $\delta_n = \frac{n\pi}{2L}$.

Аналогичное разложение в области изображений допускает и потенциал падающей волны Φ_0^L

$$\Phi_0^L(z, x, s) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(\delta_n x) e^{sz}. \quad (11)$$

Учитывая симметричное шарнирное закрепление торцов биморфов, представим их прогибы также в ряд Фурье по нечетным гармоникам

$$W^L(x, s) = \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} W_n^L \sin(\delta_n x). \quad (12)$$

Из уравнений движения биморфов (8) и выбранных представлений

Φ_1^L, Φ_0^L, W^L находим следующее выражения для составляющих прогибов W_n^L

$$W_n^L(s) = \frac{\alpha_2 \left(\frac{4}{n\pi s} - A_n^L(s) \right)}{\delta_n^4 + \alpha_1 s^2}. \quad (13)$$

Далее, подставляя (10)–(13) в граничное условие (9), получим алгебраическое уравнение относительно $A_n^L(s)$, ($n = 1, 3, 5, \dots$)

$$A_n^L(s) \cdot c_n^L(s) = d_n^L(s). \quad (14)$$

Входящие в (14) функции $c_n^L(s), d_n^L(s)$ имеют вид:

$$c_n^L(s) = \frac{1}{s^2} \left(\alpha_2 - \alpha_1 \sqrt{\delta_n^2 + s^2} \right) - \frac{\delta_n^4 \sqrt{\delta_n^2 + s^2}}{s^4};$$

$$d_n^L(s) = \frac{4\alpha_2}{n\pi s^3} + \frac{4\delta_n^4}{n\pi s^4} + \frac{4\alpha_1}{n\pi s^2}.$$

В результате решения (14) нетрудно получить формулу для отыскания неизвестных $A_n^L(s)$, которая будет содержать достаточно громоздкий коэффициент, что приводит к принципиальным трудностям при обратном преобразовании Лапласа. Воспользуемся подходом [9], согласно которому удовлетворение граничных условий осуществляется в пространстве оригиналов. Для этого, с привлечением операции свертка, производится строгая инверсия равенства (14), а неизвестные $A_n(t)$ находятся из интегрального уравнения Вольтера

$$\int_0^t A_n(\tau) c_n(t - \tau) d\tau = d_n(t), (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (15)$$

Коэффициенты уравнения (14) содержат члены вида

$$\frac{\sqrt{\delta_n^2 + s^2}}{s^k}, (k = 2, 4), \quad (16)$$

при инверсии которых нельзя воспользоваться табличными формулами обращения [10]. Для отыскания оригинала (16) воспользуемся табличной формулой обращения [10] $\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + s^2}} \rightarrow I_0(\xi t)$, где ξ – константа,

I_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а также разложением этой функции в степенной ряд [11]

$$I_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{t^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}.$$

Оригинал (16) будет иметь следующий вид

$$\frac{\sqrt{\delta_n^2 + s^2}}{s^k} \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} t^{2m} \beta_m \left[\frac{t^{k-2}}{\prod_{q=1}^{k-2} (2m+q)} + \frac{t^k \delta_n^2}{\prod_{q=1}^k (2m+q)} \right], \quad (17)$$

где $\beta_m = (-1)^m \frac{\delta_n^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}$.

Далее, воспользовавшись (17), осуществляем инверсию коэффициентов уравнения (14), получим

$$c_n(t) = a_{2t} - \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m t^{2m} \left[\alpha_1 + \frac{t^2}{(2m+1)(2m+2)} (\delta_n^2 \alpha_1 + \delta_n^4) + \frac{\delta_n^6 t^4}{\prod_{q=1}^4 (2m+q)} \right];$$

$$d_n(t) = \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{3} \delta_n^4 t^3 + 2\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \right].$$

Интегральное уравнение (15) решалось численно методом квадратурных формул. При этом, путем варьирования шага разбиения по времени, можно обеспечить необходимую точность вычислений. После вычисления функций $A_n(t)$ определяются представляющие интерес физические характеристики динамического процесса. Например, поле отраженной волны $P_1(x,t)$ на поверхности биморфов ($z=0$) находится из формулы (7) после подстановки в нее (10) и последующей инверсии полученного выражения.

$$P_1(x,t) = - \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} A_n(t) \sin(\delta_n x), \quad (18)$$

а их прогибы $W(x,t)$, после обратного преобразования, определяются по формуле

$$W(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\int_0^t A_n(t) l_n(t-\tau) d\tau + f_n(t) \right] \sin(\delta_n x), \quad (19)$$

$$\text{где } l_n(t) = -\frac{\alpha_2}{\delta_n^2} \sin\left(\frac{\delta_n^2}{\sqrt{\alpha_1}} t\right); \quad f_n(t) = \frac{4\alpha_2\sqrt{\alpha_1}}{\pi n \delta_n^4} \left[1 - \cos\left(\frac{\delta_n^2}{\sqrt{\alpha_1}} t\right) \right].$$

Следует отметить, что в выражениях (18), (19) функции $A_n(t)$ фигурируют уже как известные величины, найденные ранее из уравнений (15) по описанному выше алгоритму.

Численные расчеты

Расчеты проводились для периодически расположенных биморфов, склеенных из пьезокерамических (титанат бария, $\rho_1 = 7200 \text{ кг} / \text{м}^3$;

$$S_{11}^E = 12,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}; \quad d_{31} = -1,6 \cdot 10^{-10} \text{ кл} / \text{Н}; \quad \frac{\epsilon_{33}^T}{\epsilon_0} = 2180;$$

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{м}; h_1 = 10^{-3} \text{ м}$) и металлических (сталь, $\rho_2 = 7800 \text{ кг} / \text{м}^3$, $E_2 = 21 \cdot 10^{10} \text{ Н} / \text{м}^2$, $h_2 = 10^{-3} \text{ м}$) пластин. Поперечный размер биморфов $2L = 0,1 \text{ м}$. В качестве акустической среды выбрана вода ($\gamma = 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$, $c = 1500 \text{ м} / \text{с}$). Были рассчитаны акустическое давление на поверхности биморфов (рис. 2, 3) и их прогибы (рис. 4) в центральной зоне ($x = nL, n = 1, 3, 5, \dots$) при воздействии на биморфы акустической ударной волны единичной амплитуды ($P_0(t) = H(t)$) где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Проанализируем полученные результаты. Рис. 2 иллюстрирует изменения во времени суммарного акустического давления, состоящего из падающей ($P_0 = 1$) и отраженной волны. Из графика видно, что в начальный момент времени ($t=0$) за счет инерциальности биморфов акустическое давление на их поверхности практически равно 2 (биморфы ведут себя как акустически жесткая поверхность). Незначительное расхождение полученного результата с теоретически прогнозируемой удвоенной амплитудой суммарного давления на поверхности биморфов при $t=0$ объясняется эффектом Гиббса, заключающегося в конечности числа удерживаемых гармоник (удерживалось 5 первых нечетных

гармоник) отраженного импульса при выполнении расчетов. Дальнейший анализ кривой, приведенной на рис. 2 показывает, что при $t \geq 1$ имеет место падение акустического давления с осцилляцией его во времени. Падающий акустический импульс поддерживает на поверхности биморфов избыточное давление единичной амплитуды, в связи, с чем общее давление все это время остается положительным. С целью оценки влияния отраженного импульса на общее акустическое поле на поверхности биморфов был вычислен вклад давления от каждой гармоники отраженного сигнала. Указанные расчеты для первых 4 нечетных гармоник ($n = 1, 3, 5, 7$) приведены на рис. 3. Следует отметить, что расчет на четных гармониках не производился, поскольку за счет симметричного закрепления биморфов четные моды колебаний в них не возбуждаются. Анализ графического материала, представленного на рис. 3, показывает, что основной вклад в дифрагированное поле вносят первые три нечетные гармоники. Амплитуда последующей седьмой гармоники не столь велика. Отметим их осциллирующий характер поведения около невозмущенного (нулевого) состояния.

Как следует из расчетов (рис. 4), акустическая ударная волна единичной амплитуды вызывает статический прогиб биморфов, относительно которого и происходят колебания (перемещения биморфов).

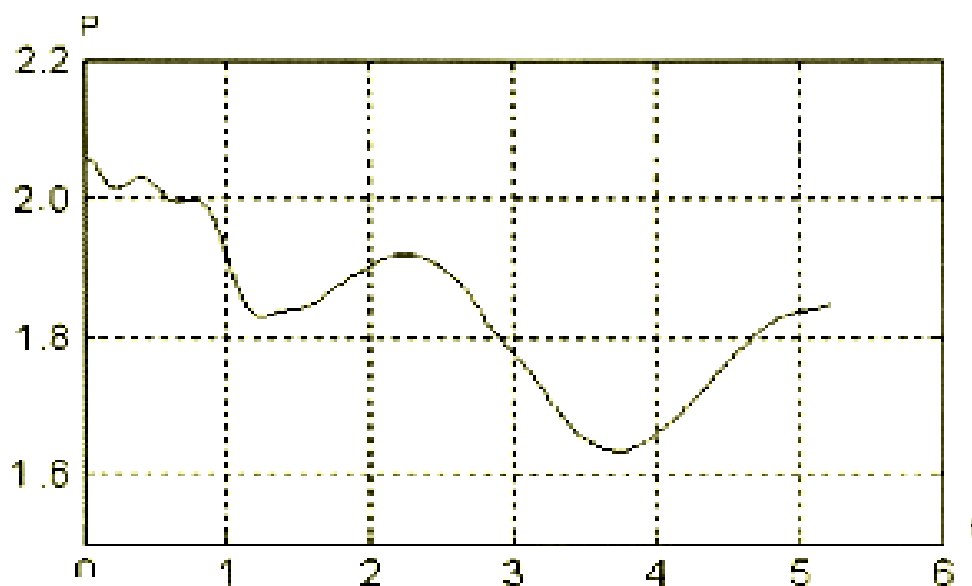


Рис. 2. Изменение во времени акустического давления на поверхности биморфа в его центральной зоне

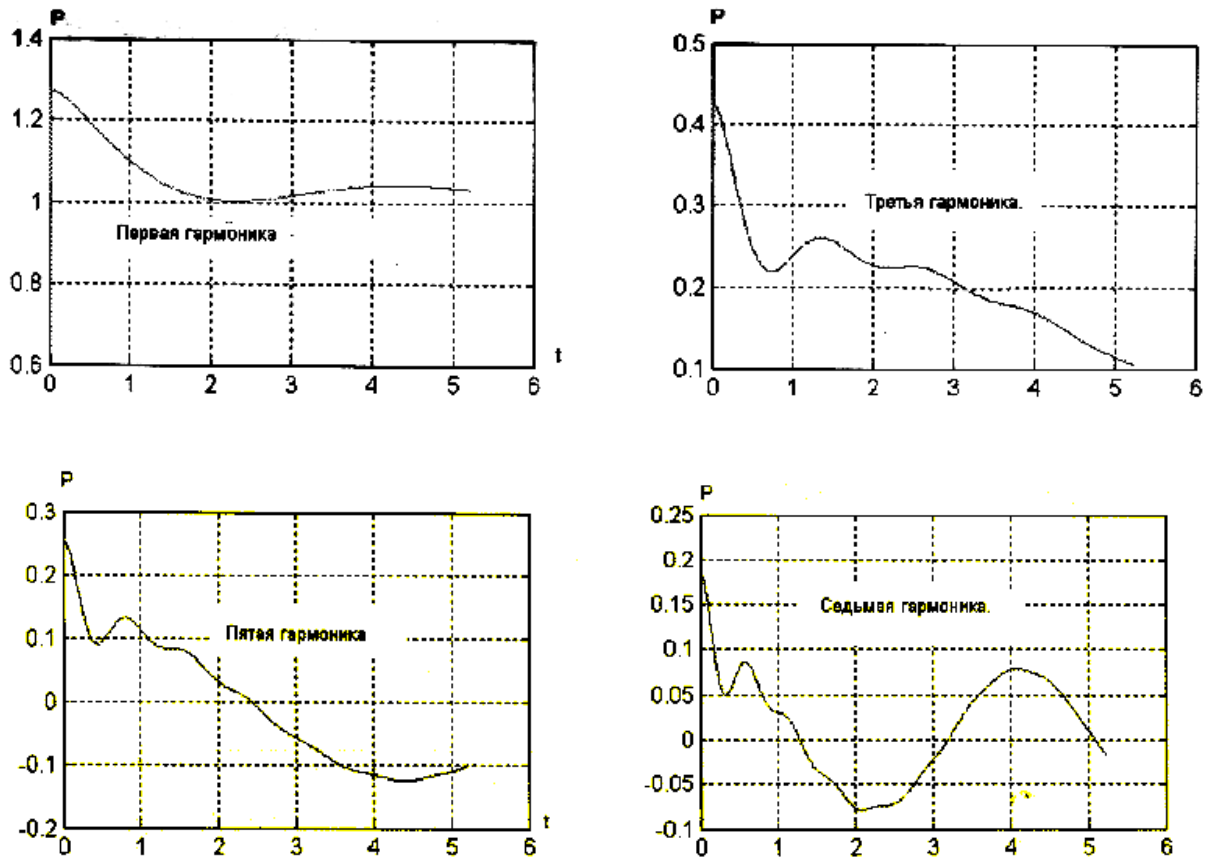


Рис. 3. Изменение во времени акустического давления на поверхности биморфа в его центральной зоне для каждой из первых нечетных гармоник отраженного импульса

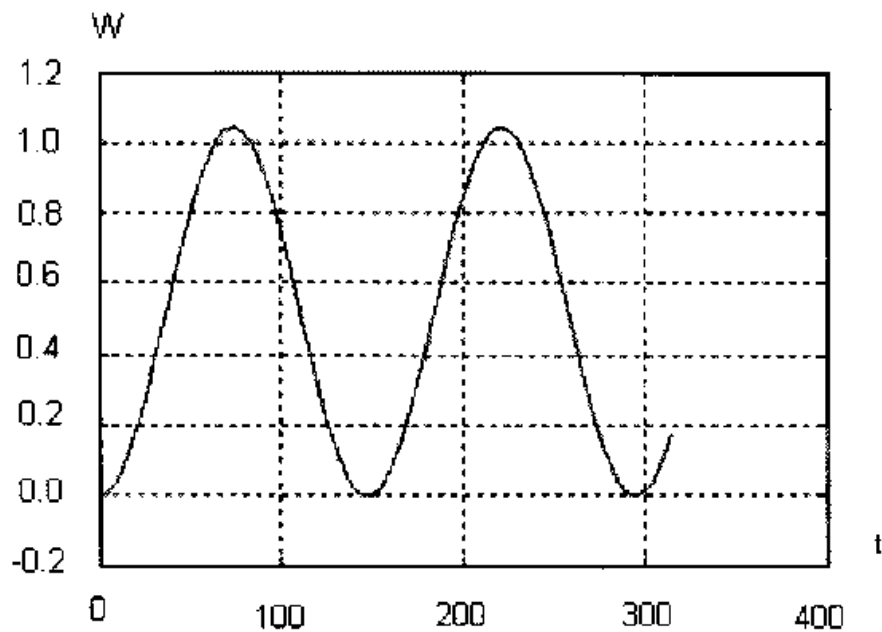


Рис.4. Изменение во времени прогиба в центральной зоне биморфа

Выводы

В работе затронута одна из проблем, относящаяся к классу задач нестационарной гидроэлектроупругости. Осуществлена математическая постановка и решение задачи действия нестационарной волны давления на периодически расположенные биморфные пьезокерамические элементы. При ее решении используется интегральное преобразование Лапласа во времени и разложение искомых величин в ряды Фурье. Удовлетворение граничных условий осуществляется в области оригиналов с привлечением интегрального уравнения Вольтера, численного его решения методом квадратурных формул. Для выбранной гидроэлектроупругой системы и гидродинамической ударной нагрузки выполнены расчеты проанализированы полученные результаты.

Полученные численные результаты с привлечением интеграла Дюамеля могут быть распространены для исследования нестационарного поведения биморфов, испытывающих действие акустического импульса практически произвольной конфигурации и длительности.

Результаты, полученные в работе, в дальнейшем могут быть использованы для управления отраженными акустическими импульсами и активной компенсации звука.

Список использованной литературы

1. Spillman W.B., Sirkis J.S. Smart materials and structures: What are they. //International journal of solids and structures. –1996– №5–p.247–254.
2. Edward F. Crawley. Javier de Luis. Use of Peizoelectric Actuators as Element of Intelligent Structures // AIAA Journal, 2002, vol. 25. №10, h. 1373–1388.
3. Бабаев А.Э. Мосеенков Ю.Б. Нестационарные колебания тонкостенной биморфной электроупругой полосы.//Доклады АНУ.–1994.–№12.–с.54–58.
4. Рудницкий С.Н., Шарапов В.М., Шульга Н.А. Колебания дискового биморфного преобразователя типа металл–пьезокерамика. // Прикл. мех.– 1990.–26. №10. –с. 64–72.
5. Евсейчик Ю.Б., Рудницкий С.Н., Шарапов В.М., Шульга Н.А. Чувствительность биморфного преобразователя типа металл–керамика. // Прикл. мех.– 1990.–26. №12. –с. 67–75.
6. Кубенко В.Д., Мосеенков Ю.Б. Взаимодействие нестационарных акустических волн с пластинами и пологими оболочками в жидкости // Прикл. мех.– 1987.–23. №10. –с. 60–66.
7. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5 Электроупругость – Киев: Наук. думка, 1989.–280 с.

8. Шендеров Е.А. Волновые задачи гидроакустики. –Л., Судостроение. 1972–352с.
9. Бабаев А.Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. –К.: Наук. думка, 1990.–176 с.
10. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению –М.: Высшая школа, 1985, 467 с.
11. Г.К.Корн. Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. –М.: Наука, 1968.–720 с.