

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕХАНІКА ГІРОСКОПІЧНИХ СИСТЕМ

Науково-технічний збірник

Заснований у 1982 році

ВИПУСК 20

Київ 2009

УДК 531

Редакційна колегія:

- Збруцький О. В. – д.т.н., проф., декан ФАКС НТУУ «КПІ»
(відповідальний редактор)
- Савін В. Г. – д.т.н., проф., зав. кафедри НТУУ «КПІ»
(заступник відповідального редактора)
- Алексейчук О. М. – к.т.н., доцент НТУУ «КПІ»
(відповідальний секретар)
- Шульга М. О. – член.-кор. НАН України, д. ф.-м. н., проф.,
зав. відділом Інституту механіки НАН
України
- Рижков Л. М. – д.т.н., проф. НТУУ «КПІ»
- Дідковський В.С. – д.т.н., проф., зав. кафедри НТУУ «КПІ»
- Закржевський О.Є. – д.т.н., проф., зав. відділом Інституту механіки
НАН України;
- Лисенко О.І. – д.т.н., проф. НТУУ „КПІ”;
- Карпачов Ю.А. – д.т.н., проф. НТУУ «КПІ»;
- Горошко О. О. – д.ф.-м.н., проф. Київського державного
університету ім. Т. Г. Шевченка
- Ларін В. Б. – д.ф.-м.н., проф., зав. відділом Інституту
механіки НАН України
- Харламов П. М. – член.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.
- Щербіна Е. С. – к.ф.-м.н., доцент НТУУ «КПІ»
- Попов В. В. – к.т.н., доцент НТУУ «КПІ»
- Канченко В.Я. – д.т.н., гол. наук. співр. НТУУ «КПІ»
- Петренко В. Є. – д.т.н., проф., зав. лаб. НТУУ «КПІ»
- Новицький В. В. – д.ф.-м.н., проф., зав. відділом Інституту
математики НАН України

Науково-технічний редактор – Штефан Н. І., доцент НТУУ «КПІ»

Розробка оригінал-макету – Степаненко С. Г., пров. інж. НТУУ «КПІ»

Адреса редакційної колегії: НТУУ «Київський політехнічний інститут», кафедра теоретичної механіки, проспект Перемоги, 37, м. Київ, 030056, тел.: 454-94-07.

Матеріал до друку затверджено на засіданні Вченої ради НТУУ «КПІ» протокол № 8 від 5 жовтня 2009 року.

Свідоцтво про державну реєстрацію збірника – серія КВ №15068-3640р, видане 06.04.2009р.

©Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
Факультет авіаційних та космічних систем

З М І С Т

	<i>Г і р о с к о п і ч н і с и с т е м и</i>	5
1.	О. В. Збруцький, С. П. Маляров Двовимірний датчик кутової швидкості на симетричному трьохступеновому гіроскопі	5
2.	В. М. Воробьев Виброзащитная платформа с маятниковым гироскопическим гасителем колебаний	12
3.	A. Prach Pitch attitude robust controller design for a wixed wing uav	21
4.	Д. Ю. Падакін, Т. В. Стеценко Корекція автономної системи навігації судна сигнальними морськими буями	33
5.	О. М. Нечипоренко, О. В. Загора Метод декомпозиції об'єкта керування для синтезу квазіоптимального керування	39
	<i>Ч у т л и в і е л е м е н т и г і р о с к о п і ч н и х с и с т е м</i>	48
1.	Н. Г. Черняк Автогенераторные измерительные преобразователи механических величин на основе техники поверхностных акустических волн	48
2.	Л. М. Рижков, Д. І. Степуренко Вплив похибок побудови опорного вектора на точність визначення кутів орієнтації за алгоритмом TRIAD	58
3.	V. A. Apostolyuk, A. S. Apostolyuk Transient process analysis of coriolis vibratory gyroscopes	64
4.	И. В. Балабанов, Г. В. Балабанова, В. И. Степин, А. П. Коррель Жесткостные характеристики типовых элементов упругих подвесов навигационных датчиков	74
5.	О.М. Безвесільна, Н.В. Гнатейко Автоматична система високоточного вимірювання кутів в динаміці	85

6. Е.А. Бондаренко		
	Расчет смещений центра светового пятна гауссова пучка на поверхностях зеркал в разбюстированном резонаторе лазерного гироскопа	88
	<i>Т е о р і я д и н а м і ч н и х с и с т е м</i>	<i>100</i>
1. Н.Г. Черняк, Э. Хазинедарлу		
	Калибровка навигационного маятникового акселерометра методом тестовых поворотов в гравитационном поле земли	100
2. С.И.Трубачев, О.Н.Алексейчук		
	Расчет сэндвичевых конструкций, подверженных статическим и динамическим нагрузкам	110
3. О. М. Мелашенко, Л. М. Рыжков		
	Анализ точности магнитной системы стабилизации микроспутника с линейным фильтром Калмана	116
4. Е. С. Щербина		
	Об управляемых топологических структурах динамических систем	122
	<i>І н ф о р м а ц і я</i>	<i>129</i>
1. К. Г. Левчук, С. Г. Степаненко		
	Учений і вихователь кагорти інженерів (до 100-річчя з дня народження М. О. Кільчевського)	129
2. В. В. Хуторный, А. В. Кулик, И. В. Федоренко, В. Н. Федоров		
	Об итогах четвертых научных чтений “днепровская орбита”, посвященных 90 – летию со дня рождения Н. Ф. Герасюты	133
	<i>А н о т а ц і ї</i>	<i>137</i>

О. В. Збруцький, С. П. Маляров

ДВОВИМІРНИЙ ДАТЧИК КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ НА СИМЕТРИЧНОМУ ТРЬОХСТЕПЕНЕВОМУ ГІРОСКОПІ

Вступ

Датчики переносної кутової швидкості є однією з складових інерціального вимірювального модуля безплатформових інерціальних навігаційних систем [1]. Їх динамічні характеристики в значній мірі визначають якості інерціальної системи. При проектуванні гіроскопічних датчиків кутової швидкості доводиться вирішувати протиріччя між постійністю коефіцієнта передачі та шириною частотного діапазону вимірюваної величини, чутливістю та точністю. Існуючі методи синтезу компенсаційного зворотного зв'язку гіроскопічних двокомпонентних вимірювачів не враховують перехресні зв'язки між вимірювальними каналами [2], що здебільшого приводить до погіршення очікуваних властивостей. Методи синтезу багатомірних систем в просторі змінних стану [3] є громіздкішими і менш наглядними за широко відомі методи одномірних систем [3, 4, 5]. Пряме використання класичних методів теорії автоматичного керування одномірних систем до симетричних двомірних виявилось громіздким та недоведеним до ефективного застосування.

Існують широкі класи двомірних гіроскопічних вимірювачів – трістепеневі гіроскопи з сферичним ротором, динамічно настроювані гіроскопи, матриці параметрів яких є кососиметричними і дозволяють згорнути два рівняння в одне.

Постановка задачі

Розглянемо можливість синтезу компенсаційного зворотного зв'язку датчика кутових швидкостей на трістепеновому динамічно настроюваному гіроскопі, застосовуючи методи синтезу одномірних систем автоматичного керування. Для цього рівняння динаміки гіроскопа, використовуючи їх симетрію, зведемо до однієї комплексної змінної та використаємо ідентичність властивостей частотних характеристик динамічних систем з дійсними та комплексними коефіцієнтами [3, 5].

Математична модель гіроскопічного вимірювача

Прийmemo для загального випадку в якості гіроскопічного вимірювача динамічно настроюваний гіроскоп (рис. 1) [6] з симетричним двокільцевим пружним підвісом

$$\begin{aligned} B_1 \ddot{\alpha} - H \dot{\beta} + f(\dot{\alpha} - \dot{\gamma}\beta) + \Delta c \alpha &= -B_1 \dot{\omega}_z + H_1 \omega_y + M_z, \\ B_1 \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} + f(\dot{\beta} - \dot{\gamma}\alpha) + \Delta c \beta &= -B_1 \dot{\omega}_y - H_1 \omega_z + M_y, \end{aligned} \quad (1)$$

де B_1 – момент інерції ротора та карданових кілець; H, H_1 – кінетичні моменти гіроскопа; f – коефіцієнт в'язкого опору; Δc – залишкова динамічна жорсткість пружного підвісу, яка характеризує неточність динамічної настройки гіроскопа; α, β – кути відхилення ротора гіроскопа відносно основи, кутові швидкості якої ω_y, ω_z ; M_y, M_z – моменти, що можуть діяти на гіроскоп.

Рівняння (1) мають кососиметричну матрицю параметрів. Введемо комплексні величини

$$\varphi = \alpha + i\beta, \quad \Omega = \omega_z + i\omega_y, \quad M = M_z + iM_y, \quad i^2 = -1$$

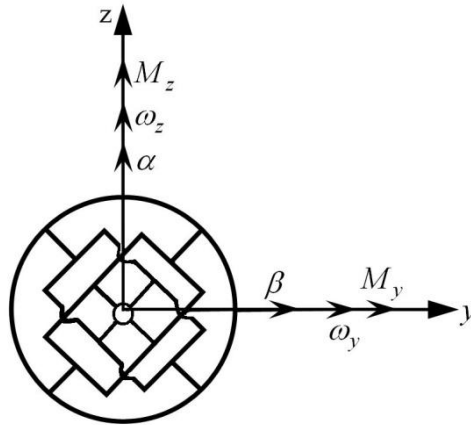


Рис. 1 Чутливий елемент гіроскопа

та перетворимо рівняння (1) до вигляду

$$B_1 \ddot{\varphi} + (f + iH) \dot{\varphi} + (\Delta c + if\dot{\gamma}) \varphi = -iH_1 \Omega - B_1 \dot{\Omega} + M \quad (2)$$

Покращення динамічних характеристик датчика досягається шляхом реалізації компенсаційного зворотного зв'язку (рис. 2), який формує управляючий момент $M_{уп}$, що повинен компенсувати гіроскопічний момент від вимірюваної переносної кутової швидкості. На рис. 2 позначені передатні функції гіроскопа $W_z(S)$ та зворотного зв'язку $W_{зз}(S)$, коефіцієнти передачі $k_{\partial k}$ датчиків кутів повороту ротора та $k_{уп}$ датчиків управляючих пристроїв (датчиків моментів). З рівняння (1) знайдемо

$$W_2(s) = \frac{1}{B_1(s + n_1 - i\omega_1)(s + n_2 + i\omega_2)},$$

$$\omega_1 = \frac{\Delta c}{H}; \omega_2 = \frac{H}{B_1} - \omega_1; n_1 = n_2 = \frac{f}{2B_1}. \quad (3)$$

Синтез зворотного зв'язку

Зведення двомірної системи (1) до одновірної (2) дозволяє використати відомі [5] методи синтезу систем автоматичного керування, які основані на алгебраїчних критеріях для рівнянь з комплексними

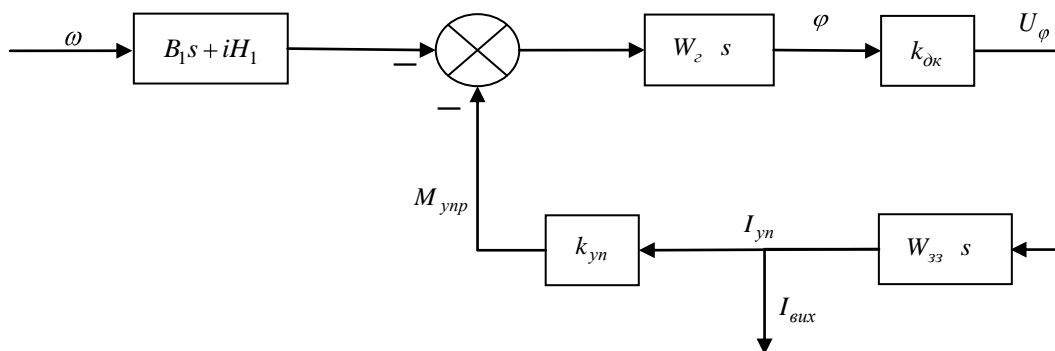


Рис. 2. Структурна схема датчика

коефіцієнтами.

Ідеальні властивості двомірного датчика полягають у постійності коефіцієнта передачі при вимірюванні гармонічних кутових швидкостей з довільними частотами, та відсутності взаємозв'язків між вимірювальними каналами (перехресних зв'язків). Такі властивості приводять до вимоги забезпечення постійності передатної функції замкненої системи (рис. 2), причому вона не повинна бути комплексним числом:

$$\Phi_s = \frac{I_{vux}}{\Omega} = -K = const, \quad K \in \text{Re або Im} \quad (4)$$

З рис. 2 знаходимо

$$\Phi_s = -\frac{B_1s + iH_1}{1 + W_2W_{33}k_{dk}k_{yn}}. \quad (5)$$

Тоді з (4) та (5) отримаємо при $K = \frac{iH_1}{k_{yn}}$

$$W_{33}(s) = i \frac{H_1}{B_1 s k_{yn} k_{ок} W_2} = i \frac{H_1}{k_{ок} k_{yn}} \cdot \frac{(s + n_1 - i\omega_1)(s + n_2 + i\omega_2)}{s}. \quad (6)$$

Аналіз стійкості системи для знайденої ланки зворотного зв'язку (6) показує знаходження її на межі коливальної стійкості. З характеристичного поліному системи (5), або з передатної функції розімкненої системи

$$W_p(s) = \frac{iH_1}{B_1 s} \quad (7)$$

знаходимо частоту незатухаючих коливань замкненої системи

$$\omega = \frac{H_1}{B_1} \approx \omega_2,$$

яка збігається з частотою нутаційних коливань гіроскопа.

Оптимізація перехідного процесу

Забезпечимо якість перехідного процесу в системі, мінімізуючи деякий функціонал якості. Виберемо для останнього функціонал

$$I = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt, \quad (8)$$

який залежить від часу t перехідного процесу та абсолютного значення похибки відхилення змінної стану від усталеного значення при одиничному ступінчастому входному впливі.

Характеристичний поліном системи (5) з послідовною корегуючою ланкою $W_k(s)$ регулятора зворотного зв'язку знайдемо як чисельник виразу

$$1 + W_p(s)W_k(s),$$

який буде з врахуванням (7)

$$H(s) = s + i\omega_2 W_k(s). \quad (9)$$

Оптимізація полінома (9) за критерієм (8) приводить до знаходження його коефіцієнтів при вибраній структурі $W_k(s)$. З метою мінімізації степені полінома (9) задамо $W_k(s)$ у вигляді комплексного числа і запишемо

$$H(s) = s + b + ia \Rightarrow H_{opt}(s) \quad (10)$$

Значення коефіцієнтів a та b оптимального характеристичного полінома знайдемо, скориставшись результатами оптимізації для системи з дійсними коефіцієнтами [3, 7], прийнявши до уваги зв'язок коефіцієнтів полінома (10) з комплексними коефіцієнтами з коефіцієнтами відповідного йому полінома з дійсними коефіцієнтами

$$H(s) = s^2 + 2bp + a^2 + b^2. \quad (11)$$

Оптимальний характеристичний поліном другої степені, що мінімізує функціонал (8), буде

$$H_{opt} = s^2 + 1,4\omega_0 s + \omega_0^2, \quad (12)$$

де ω_0 – характерна частота, значення якої знаходиться з необхідної швидкодії системи – часу перехідного процесу. Тоді з (11) та (12) отримаємо $a=b=0,7\omega_0$, а з (9) та (10) маємо

$$W_k(s) = \frac{a}{\omega_2}(1-i). \quad (13)$$

Скорегований регулятор зворотного зв'язку буде

$$W_{зз.к}(s) = W_{зз}(s)W_k(s) = K_p(1+i)\frac{(s+n_1+i\omega_2)}{s},$$

$$K_p = a(k_{ок}k_{yn})^{-1}. \quad (14)$$

Фізична реалізація передатних функцій двомірних ланок

Передатна функція зворотного зв'язку (14) двомірної системи утворена послідовним з'єднанням ланок вигляду

$$W(s) = A(s) + iB(s). \quad (15)$$

Знайдемо передатні функції прямих ланок, що знаходяться в каналах вимірювання, та ланок зв'язку між каналами. Тоді, позначивши вхідну та вихідну величини відповідної ланки

$$M = m_1 + im_2, \quad \Phi = x + iy,$$

отримаємо

$$x + iy = Am_1 - Bm_2 + i(Bm_1 + Am_2).$$

Структурна схема двомірної ланки з передатною функцією (15) показана на рис. 3.

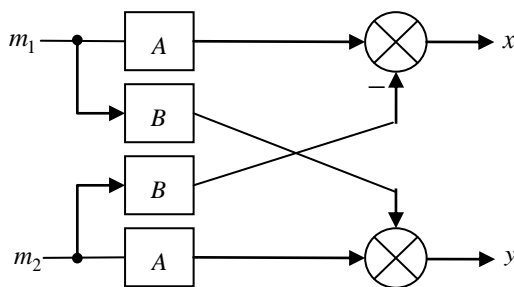


Рис. 3. Структурна схема двомірної ланки

Частотні характеристики двомірного датчика кутової швидкості

Дослідимо властивості датчика кутової швидкості за передатними функціями по вихідній величині

$$\Phi(s) = -\frac{iH_1(B_1s + iH_1)W_\kappa}{k_{yn}(B_1s + iH_1W_\kappa)} \quad (16)$$

та кутам відхилення ротора чутливого елемента

$$\Phi^\varphi(s) = -\frac{\varphi}{\Omega} \cdot \frac{B_1s(B_1s + iH_1)}{(B_1s + iH_1W_\kappa)(s + n_1 - i\omega_1)(s + n_2 + i\omega_2)}. \quad (17)$$

З (17) видно, що при постійній кутовій швидкості $\Omega = const$ кути відхилення ротора в усталеному режимі дорівнюють нулю.

При $W_\kappa(s) \neq 1$ передатна функція (5) датчика кутової швидкості по вихідній змінній не є постійною величиною (4).

З (16) знайдемо передатні функції прямого $\Phi_{np}(s)$ та перехресного Φ_{nep} (функція взаємного зв'язку) каналів, прийнявши в (13) $a = \omega_2$:

$$\Phi_{np}(s) = K \frac{s^2 + \omega_2s + 2\omega_2^2}{s^2 + 2\omega_2s + 2\omega_2^2}, \quad \Phi_{nep}(s) = K \frac{s(s + \omega_2)}{s^2 + 2\omega_2s + 2\omega_2^2},$$

$$K = H_1k_{yn}^{-1}, \quad (18)$$

звідки знаходимо амплітудо-частотні та фазо-частотні характеристики

$$W_{np}(z) = K \sqrt{1 - \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^4} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}z^4} \right)^{-1},$$

$$W_{nep}(z) = K \sqrt{z^2 + z^4} \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{4}z^4} \right)^{-1},$$

$$a = \omega_2,$$

$$\varphi_{nep}(z) = \frac{1}{2}\pi + \operatorname{arctg}z - \operatorname{arctg} \frac{2z}{2 - z^2}, \quad z = \omega \cdot \omega_2^{-1}. \quad (19)$$

Таким чином, для малих частот ω зміни вимірюваної кутової швидкості Ω амплітудо-частотної характеристики

$$W_{np}(z \square 1) = K, \quad W_{nep}(z \square 1) = 0$$

відповідають ідеальному вимірювачу (4), при цьому фазове зміщення $\varphi_{nep}(z \square 1) = 0$.

При зростанні $\omega(z)$ коефіцієнт передачі прямих каналів зменшується на інтервалі частот до $\omega = \sqrt{2}\omega_2$, досягаючи мінімального значення

Г і р о с к о п і ч н і с и с т е м и

0,5K (18), а коефіцієнт передачі перехресних каналів зростає. Фазове зміщення вихідної величини по відношенню до фази вимірюваної кутової швидкості змінюється незначно. Графіки частотних характеристик (19) для $a = \omega_2$ приведені на рис. 4 та рис. 5.

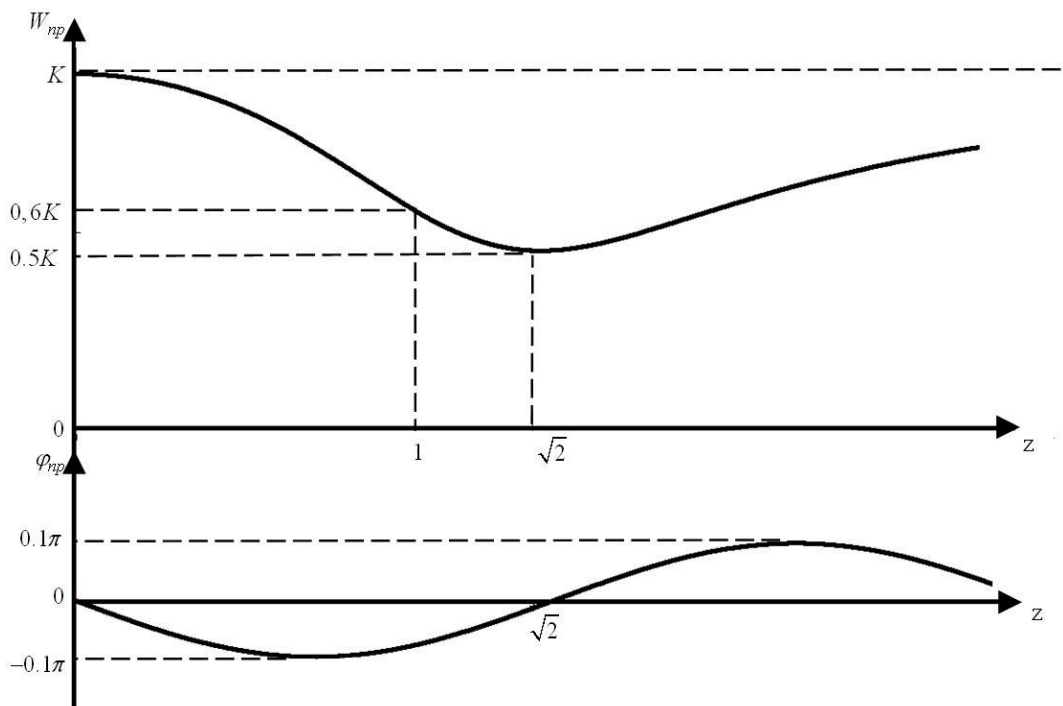


Рис. 4. Частотні характеристики прямих каналів

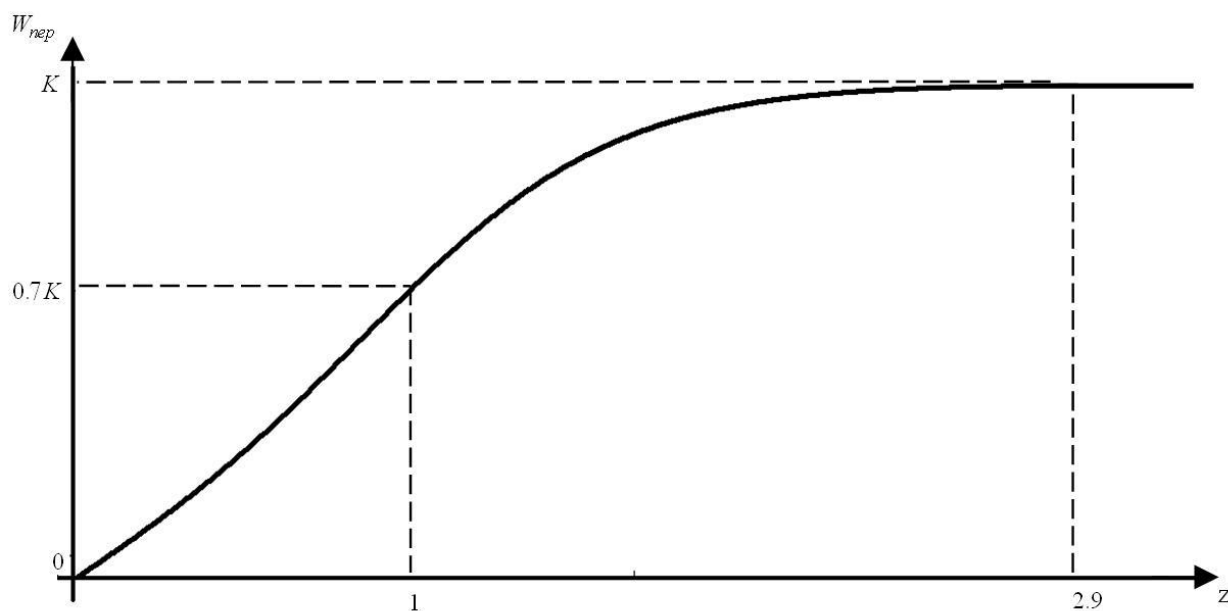


Рис. 5. Частотна характеристика перехресного каналу

Висновки

Розглянутий підхід застосування частотних методів синтезу одномірних систем до двомірних симетричних систем згортанням останніх до одномірної з комплексними коефіцієнтами та комплексною змінною показав його відносну простоту та ефективність. Отримані передатні функції двомірного датчика кутової швидкості дозволяють знайти параметри регулятора зворотного зв'язку та реалізувати його за встановленою структурою.

Уявляється цікавим застосування цього підходу до синтезу більш складних двомірних систем з симетрією.

Список використаної літератури

1. *Анучин О. Н., Емельянов Г. И.* Бесплатформенные системы навигации и ориентации. – СПб.: ИТМО, 1995. – 110 с.
2. *Пельпор Д.С., Матвеев В.А., Арсеньев В.Д.* Динамически настраиваемые гироскопы.- М.: Машиностроение, 1988.-264с.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления. Под ред. П. А. Пупкова, Т. 1, 2, 3. – М.: МГТУ, 2000.
4. *Попович М. Г., Ковальчук О. В.* Теорія автоматичного керування. – К.: Либідь, 2007. – 655 с.
5. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1972. – 767 с.
6. *Павловский М. А.* Теория гироскопов. – К.: Вища шк., 1986. – 303 с.
7. *Кузовков Н.Т.* Системы стабилизации летательных аппаратов. – М.: Высшая шк., 1976. – 304 с.

УДК 67.752

В. М. Воробьев

ВИБРОЗАЩИТНАЯ ПЛАТФОРМА С МАЯТНИКОВЫМ ГИРОСКОПИЧЕСКИМ ГАСИТЕЛЕМ КОЛЕБАНИЙ

Введение

Известно, что многие высокоточные приборы ориентирования, работающие на неподвижном основании, но установленные на борту различных транспортных средств, достаточно критичны к горизонтальным вибрациям. Такие вибрации обычно обусловлены работой внутренних

динамических систем энергообеспечения и вынужденными колебаниями конструкций транспортных средств на собственных частотах, первый тон которых находится в области достаточно низких частот.

Разработанные виброизолирующие платформы с низкой собственной частотой горизонтальных колебаний, такие как магнитный подвес тела с ферромагнитным диском [1], установка платформы на вертикальных сжатых упругих стержнях, устройства с применением воздушных подшипников [2], достаточно эффективны в диапазоне средних и высоких частот вибраций ($f \geq 10$ Гц). Возможно повышение эффективности работы указанных виброизолирующих платформ с малой поперечной упругой жесткостью в области низкочастотных вибраций за счет введения в схему платформы динамического гасителя в виде физического маятника [3,4], однако при этом возможно подавление колебаний платформы только для узкополосной вибрации, фиксированная частота которой должна совпадать с собственной частотой колебаний физического маятника. Эффективность использования вышеуказанного динамического гасителя для более широкого частотного диапазона может быть увеличена за счет установки в корпусе физического маятника двухстепенного гироскопа. При этом появляется возможность достаточно просто осуществлять «антирезонансную» настройку параметров системы при изменении частоты действующих возмущений путем регулирования скорости вращения ротора гироскопа.

Следует также отметить, что известные гироскопические гасители колебаний используются для подавления угловых колебаний изолируемого объекта [3,5], в рассматриваемой же работе предлагается использование маятникового гасителя колебаний с двухстепенными гироскопами для подавления поступательных горизонтальных колебаний виброзащитной платформы.

Постановка задачи

Задачей исследования является составление дифференциальных уравнений движения рассматриваемой системы и анализ ее динамических свойств.

Схема виброзащитной платформы с маятниковым гироскопическим гасителем колебаний представлена на рис. 1. Предполагается, что виброзащитная платформа 1 расположена в горизонтальной плоскости. Вводим следующие системы координат: $A\xi\eta\zeta$ – неподвижная система координат; $OXYZ$ – система координат, связанная с подвижным основанием платформы; система координат $O_1X_1Y_1Z_1$ связана с платформой. Вектор $\vec{r}(\xi, \eta)$ определяет движение основания платформы относительно неподвижной системы координат, а вектор $\vec{r} x, y$ –

движение платформы относительно основания. Величины C_x и C_y определяют эквивалентные линейные упругие жесткости амортизационной связи платформы с основанием в направлении соответствующих осей.

Оси системы координат $O_1X_2Y_2Z_2$ связаны с кольцом 2 карданова подвеса маятниковой части системы, причем точка подвеса предполагается расположенной в плоскости платформы. Углы β и γ характеризуют отклонение корпуса маятника от вертикали в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Система координат $O_1X_3Y_3Z_3$ связана с маятниковой частью 3. В цилиндрическом корпусе 3 установлены два двухстепенных гироскопа 4 и 5 с вертикальной осью вращения кожуха. Оси вращения роторов расположены в исходном положении взаимно перпендикулярно и параллельно осям O_1X_3 и O_1Y_3 корпуса 3. Вращение кожухов гироскопов, определяемое углами α_1 и α_2 , ограничено упругой связью, угловые крутильные жесткости которой для гироскопа 4 считаем равной C_{α_1} , а для гироскопа 5 – C_{α_2} . Угловое положение роторов гироскопов 4 и 5 относительно кожухов определяется соответственно углами φ_1 и φ_2 . Центр тяжести цилиндрического корпуса маятника C_1 находится от точки подвеса на расстоянии $O_1C_1 = l_1$, центры тяжести гироскопов 4 и 5 точки C_2 и C_3 смещены от точки подвеса соответственно на расстояния l_2 и l_3 $O_1C_2 = l_2$; $O_1C_3 = l_3$.

Движение основания виброзащитной платформы относительно неподвижной системы координат считаем заданным в виде

$$\xi = \xi_0 \sin \omega t, \eta = \eta_0 \sin \omega t.$$

Таким образом, величины $\xi + x$ и $\eta + y$ будут определять вынужденные колебания виброзащитной платформы относительно неподвижной системы координат. Задача состоит в определении возможности подавления этих колебаний и исследовании динамических свойств рассматриваемой системы.

Уравнения движения и их анализ

При вычислении кинетической энергии системы пренебрегаем массой и моментами инерции кольца 2 и кожухов гироскопов

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{\xi} + \dot{x}^2 + \dot{\eta} + \dot{y}^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m \dot{\xi}_{c_i}^2 + \dot{\eta}_{c_i}^2 + \dot{\zeta}_{c_i}^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 A_i \omega_{x_{i+2}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 B_i \omega_{y_{i+2}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 C_i \omega_{z_{i+2}}^2.$$

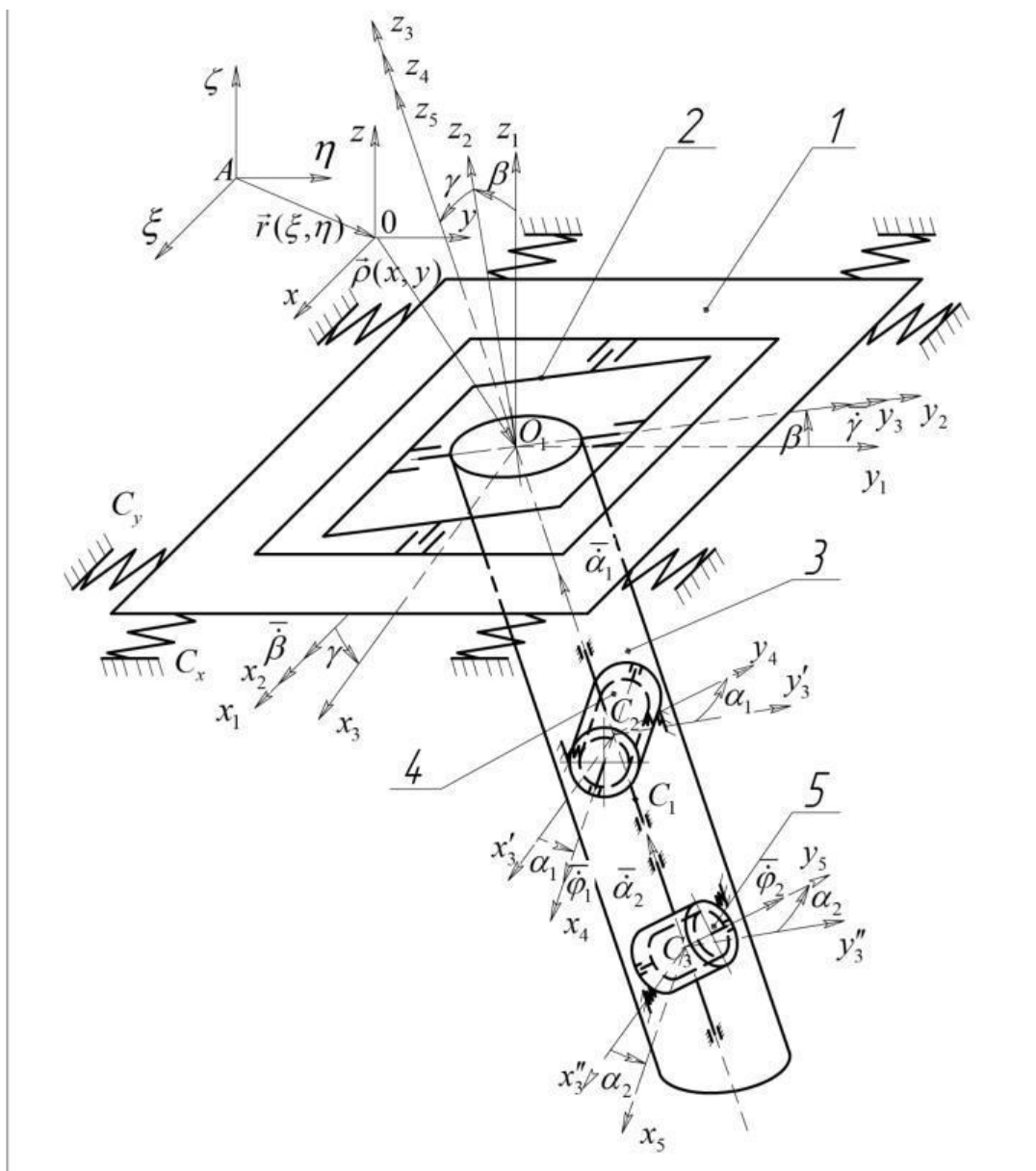


Рис. 1. Схема вибраційної платформи з маятниковим гіроскопічним гасителем коливань

Здесь m, m_1, m_2, m_3 – соответственно массы платформы, корпуса маятника и роторов гироскопов 4 и 5, A_i, B_i, C_i – главные моменты инерции корпуса маятника и роторов гироскопов относительно осей, проходящих через центры масс.

Уравнения, определяющие координаты центра масс корпуса маятника и роторов гироскопов в неподвижной системе координат и проекции угловых скоростей на центральные связанные оси корпуса маятника и роторов гироскопов имеют вид:

$$\xi_{C_i} = \xi + x - l_i \sin \gamma,$$

$$\eta_{C_i} = \eta + y + l_i \sin \beta \cos \gamma,$$

$$\zeta_{C_i} = -l_i \cos \beta \cos \gamma,$$

$$\omega_{x_3} = \dot{\beta} \cos \gamma, \quad \omega_{y_3} = \dot{\gamma}, \quad \omega_{z_3} = \dot{\beta} \sin \gamma,$$

$$\omega_{x_4} = \dot{\phi}_1 + \dot{\beta} \cos \gamma \cos \alpha_1 + \dot{\gamma} \sin \alpha_1,$$

$$\omega_{y_4} = -\dot{\beta} \cos \gamma \sin \alpha_1 + \dot{\gamma} \cos \alpha_1,$$

$$\omega_{z_4} = \dot{\alpha}_1 + \dot{\beta} \sin \gamma,$$

$$\omega_{x_5} = \dot{\beta} \cos \gamma \cos \alpha_2 + \dot{\gamma} \sin \alpha_2,$$

$$\omega_{y_5} = \dot{\phi}_2 - \dot{\beta} \cos \gamma \sin \alpha_2 + \dot{\gamma} \cos \alpha_2,$$

$$\omega_{z_5} = \dot{\alpha}_2 + \dot{\beta} \sin \gamma.$$

Полученные точные уравнения движения представляют систему восьми нелинейных дифференциальных уравнений, два из которых, соответствующих обобщенным координатам ϕ_1 и ϕ_2 , имеют циклический интеграл вида

$$\begin{aligned} A_2 \dot{\phi}_1 + \dot{\beta} \cos \gamma \cos \alpha_1 + \dot{\gamma} \sin \alpha_1 &= H_1, \\ B_3 \dot{\phi}_2 - \dot{\beta} \cos \gamma \sin \alpha_2 + \dot{\gamma} \cos \alpha_2 &= H_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Численное значение величин H_1 и H_2 весьма мало отличается от величин $A_2 \dot{\phi}_1$ и $B_3 \dot{\phi}_2$.

Исключая с помощью интеграла (1) из точных уравнений движения обобщенные координаты ϕ_1 и ϕ_2 , и рассматривая такое движение системы, когда угловые отклонения по координатам $\beta, \gamma, \alpha_1, \alpha_2$ считаются малыми, получим две независимые системы из трех дифференциальных уравнений, описывающих движение системы в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях

$$\begin{aligned} M\ddot{x} - m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 \ddot{\gamma} + C_x x &= M \xi_0 \omega^2 \sin \omega t, \\ I_y \ddot{\gamma} + H_1 \dot{\alpha}_1 - m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 \ddot{x} + m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 g \gamma &= \\ = - m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 \xi_0 \omega^2 \sin \omega t, \\ C_2 \ddot{\alpha}_1 - H_1 \dot{\gamma} + C_{\alpha_1} \alpha_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

Г и р о с к о п и ч н и с и с т е м и

$$\begin{aligned}
 M\ddot{y} + m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 \ddot{\beta} + C_y y &= M \eta_0 \omega^2 \sin \omega t, \\
 I_x \ddot{\beta} - H_2 \dot{\alpha}_2 + m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 \ddot{y} + m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 g \beta &= \\
 = m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 \eta_0 \omega^2 \sin \omega t, \\
 C_3 \ddot{\alpha}_2 + H_2 \dot{\beta} + C_{\alpha_2} \alpha_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь введены обозначения: $M = m + m_1 + m_2 + m_3$ – масса всей системы, $I_x = \sum_{i=1}^3 A_i + m_i l_i^2$, $I_y = \sum_{i=1}^3 B_i + m_i l_i^2$ – экваториальные моменты инерции маятникового гасителя колебаний относительно точки подвеса. Величины ξ_0 , η_0 определяют амплитуду вибрации основания, ω – круговая частота вибрации.

Так как системы уравнений (2) и (3) являются эквивалентными, то ограничимся изучением движения системы (2).

Частное решение системы (2), определяющее вынужденные колебания платформы относительно основания на частоте возбуждения, имеет вид

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{\Delta} C_2 \left[M I_y - m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 \right]^2 \omega^4 + \\
 &+ \left[C_{\alpha_1} m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 \right]^2 - M C_{\alpha_1} I_y - M C_2 m_1 l_1 + \\
 &+ m_2 l_2 + m_3 l_3 g - M H_1^2 \omega^2 + M C_{\alpha_1} m_1 l_1 + m_2 l_2 + \\
 &+ m_3 l_3 g \xi_0 \omega^2,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta &= C_2 \left[m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 \right]^2 - M I_y \omega^6 + \\
 &+ C_{\alpha_1} \left[M I_y - m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 \right]^2 + \\
 &+ C_2 \left[C_x I_y + M m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 g + M H_1^2 \right] \omega^4 - \\
 &- \left[m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 g C_{\alpha_1} M + C_2 C_x + \right. \\
 &\left. + C_x H_1^2 + C_{\alpha_1} I_y \right] \omega^2 + C_x C_{\alpha_1} m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 g.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Вычисляя вынужденные колебания платформы относительно неподвижной системы координат, получим

$$\begin{aligned}
 \xi + x &= \frac{C_x \xi_0 \sin \omega t}{\Delta} C_{\alpha_1} m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 g - \left[H_1^2 + C_2 m_1 l_1 + \right. \\
 &\left. + m_2 l_2 + m_3 l_3 g + C_{\alpha_1} I_y \right] \omega^2.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Обратить определяемую выражением (6) амплитуду колебаний защищаемой системы в ноль при отсутствии демпфирования возможно, если кинетический момент гироскопа H_1 будет удовлетворять условию

$$H_1 = \sqrt{m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3} \cdot g \left(\frac{C_{\alpha_1}}{\omega^2} - C_2 \right) - C_{\alpha_1} I_y . \quad (7)$$

При сравнительно небольшом изменении круговой частоты возмущений ω условие антирезонансной настройки (7) достаточно легко обеспечивать за счет изменения угловой скорости вращения ротора гироскопа $H_1 = A_2 \dot{\phi}_1$.

При выполнении условия (7) амплитуды вынужденных колебаний системы для угловых координат γ и α_1 будут соответственно равны

$$\begin{aligned} A_\gamma &= \frac{C_x \xi_0}{\Delta_1} C_2 \omega^2 - C_{\alpha_1} m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 , \\ A_{\alpha_1} &= - \frac{C_x H_1 \xi_0 \omega}{\Delta_1} m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 , \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= C_2 \left[m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 \right]^2 - M I_y \omega^4 + C_x C_2 I_y - C_{\alpha_1} m_1 l_1 + \\ &+ m_2 l_2 + m_3 l_3 \left[\omega^2 - C_{\alpha_1} M m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 g \right] . \end{aligned} \quad (9)$$

Проведем численную оценку кинетического момента гироскопа, обеспечивающего невозмущаемость платформы, для системы, которая имеет следующие характеристики:

$$\begin{aligned} m &= 5 \text{ кг}; \quad m_1 = 1,8 \text{ кг}; \quad m_2 = m_3 = 0,7 \text{ кг}; \quad l_1 = l_3 = 0,15 \text{ м}; \\ l_2 &= 0,25 \text{ м}; \quad M = 8,2 \text{ кг}; \quad C_x = 2,9 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}; \quad I_y = 0,131 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\ B_2 = C_2 &= 6 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad A_2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad C_{\alpha_1} = 9,5 \frac{\text{Нм}}{\text{рад}}; \\ \omega &= 6,28 \frac{1}{\text{сек}} \quad (f=1\text{Гц—частота вибрации}), \quad H_1 = 0,2278 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{сек} \end{aligned}$$

$$\left(\dot{\phi}_1 = 569 \frac{\text{рад}}{\text{сек}} = 90,68 \frac{\text{об}}{\text{сек}} \right). \quad (10)$$

Собственные частоты системы при этом, определяемые из частотного уравнения $\Delta = 0$, равны $\omega_1 = 129,82 \frac{1}{\text{сек}}$, $\omega_3 = 0,188 \frac{1}{\text{сек}}$,

$\omega_2 = 23,21 \frac{1}{\text{сек}}$. Для двухмассовой системы, когда $H_1 = 0$, при сохранении

вышеуказанных характеристик собственные частоты системы имеют следующие значения: $\omega_1 = 22,57 \frac{1}{\text{сек}}$ $f_1 = 3,60 \text{ Гц}$, $\omega_2 = 5,538 \frac{1}{\text{сек}}$

$f_2 = 0,88 \text{ Гц}$. Сопоставительный анализ частот показывает, что за счет введения гироскопа в присоединенный маятниковый гаситель система отстраивается от низкочастотных маятниковых колебаний с частотой порядка одного герца.

Определяемые по формулам (8) амплитуды вынужденных колебаний при $\xi_0 = 10^{-3} \text{ м}$ будут равны: $A_\gamma = 0,0288 < 2^0$, $A_{\alpha_1} = 4,33 \cdot 10^{-3} < 20 \text{ угл. мин}$. При $H_1 = 0$ амплитуда угловых колебаний маятникового гасителя оказывается достаточно большой $A_\gamma = 0,5968 \approx 34^0$.

Численные оценки показывают, что гироскоп маятникового гасителя колебаний оказывает стабилизирующее действие и обеспечивает незначительный ход элементов системы.

Учитывая, что при низкочастотных вибрациях основания $\frac{C_{\alpha_1}}{\omega^2} \gg C_2$, из (7) получим, что подавление колебаний защищаемой платформы возможно при вибрациях, частота которых будет удовлетворять соотношению

$$\omega^2 < \frac{m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2 + m_3 \ell_3}{I_y} g, \quad (11)$$

что реально соответствует низкочастотным возмущениям.

Для приведенных выше параметров определяемая соотношением (7) зависимость кинетического момента гироскопа H от частоты $f = \frac{\omega}{2\pi} [\text{Гц}]$ подавляемой вибрации представлена на рис. 2. Влияние изменения кинетического момента H на собственные частоты ω_1 и ω_3 показано на рис. 3.

Собственная частота ω_2 , обусловленная поперечной жесткостью амортизационной связи платформы с основанием, при увеличении H в десять раз для диапазона рис. 3 незначительно отличается от соответствующей частоты двухмассовой модели.

В отличие от известных принципов динамического гашения колебаний в рассмотренной задаче подавляемая («антирезонансная») частота вибрации ω не совпадает с собственными частотами системы.

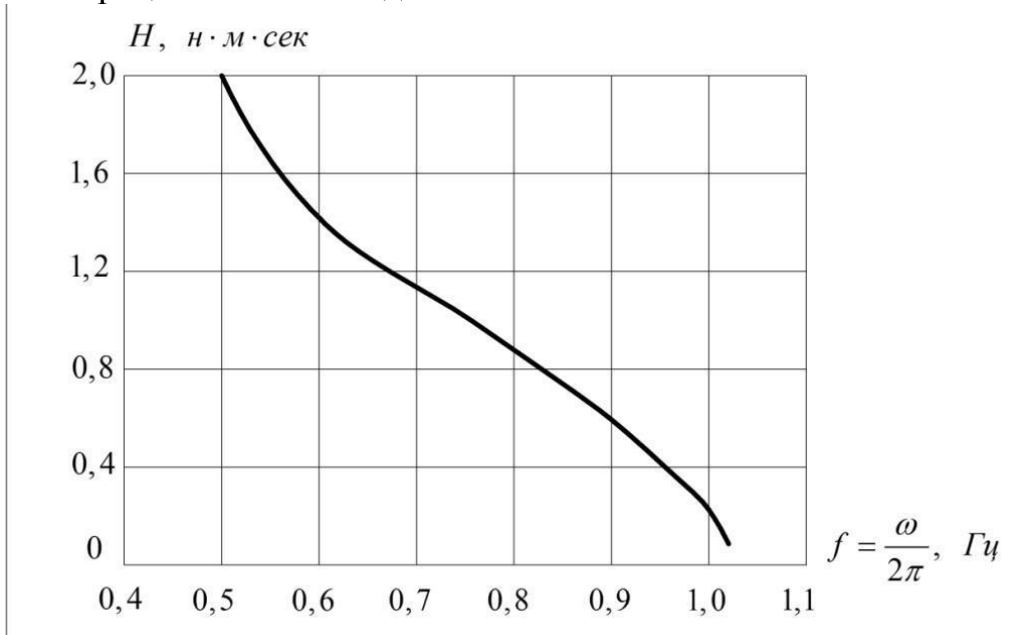


Рис.2. Зависимость кинетического момента гироскопа H от частоты подавляемой вибрации

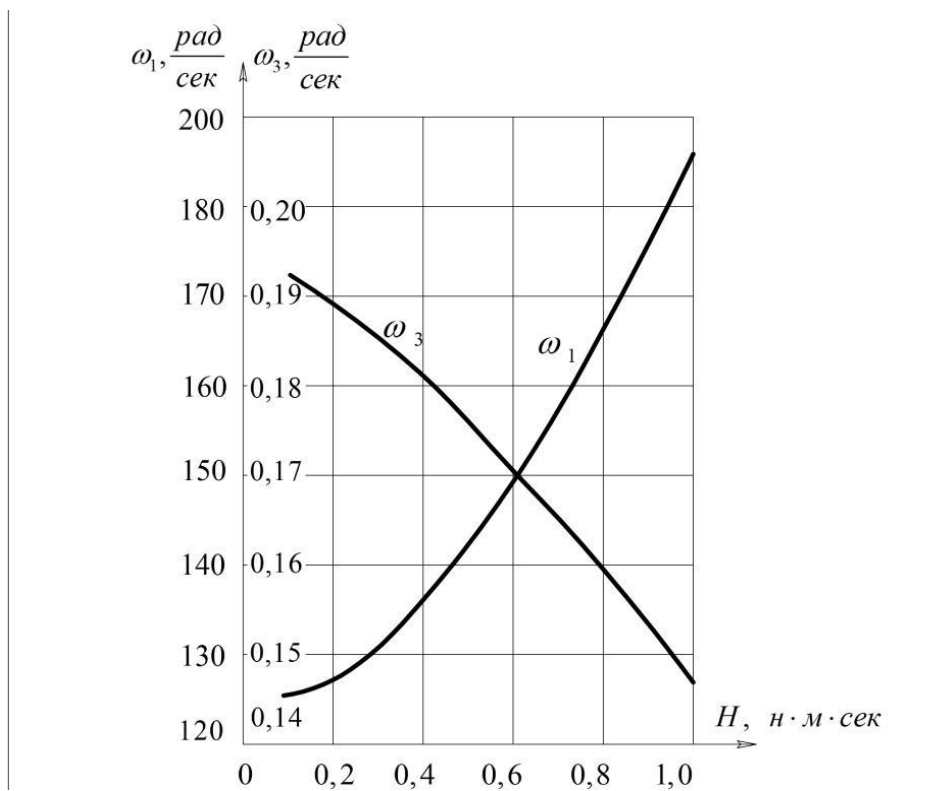


Рис.3. Зависимость собственных частот от изменения кинетического момента гироскопа

Выводы

Преимуществом маятникового гироскопического гасителя колебаний для подавления низкочастотных вынужденных колебаний виброзащитной платформы является возможность за счет регулируемого изменения кинетического момента гироскопа проводить непрерывную настройку параметров динамического гасителя в соответствии с изменением частоты действующих вибрационных нагрузок. В отличие от активных систем виброизоляции, в которых неподвижность защищаемого тела обеспечивается силовыми исполнительными устройствами системы управления, невозмущаемость виброзащитной платформы с маятниковым гироскопическим гасителем колебаний достигается усилием в связи гасителя, приложенным к платформе и полностью уравнивающим возмущающую силу.

Получены соотношения, накладывающие ограничения на частотный диапазон подавляемых вибраций. Исследовано влияние изменения кинетического момента гироскопа на собственные частоты системы. Для случая «антирезонансной» настройки системы произведена оценка амплитуд колебаний элементов маятникового динамического гасителя.

Список использованной литературы

1. *Воробьев В.М., Воробьев-Обухов А.В., Поздеев О.Д.* Магнитный подвес тела с ферромагнитным диском.//Приборы и техника эксперимента, №5, 1976.–с.245–247.
2. *Лорэн.* Виброизолирующее устройство с малой собственной частотой.//Приборы для научных исследований, №2, 1974.–с.55–61.
3. *Бабицкий В.И.* Принципы динамического гашения колебаний.// Вибрации в технике, том 6, М., «Машиностроение», 1981.–с.326–345.
4. *Корнев Б.Г., Резников Л.М.* Динамические гасители колебаний. М.:Наука, 1988.–304 с.
5. *Арнольд Р.* Гироскопические поглотители колебаний и стабилизаторы.// Проблемы гироскопии.М., «Мир», 1967.–с.86–99.

A. Prach**PITCH ATTITUDE ROBUST CONTROLLER DESIGN FOR A WIXED WING UAV****Introduction**

Autonomy of UAVs requires efficient and accurate control systems. One of the most important steps in designing a control system is the development of the UAV model. The full model of an aircraft includes models of its subsystems such as: aerodynamics, propulsion, actuators, etc. Different strategies are used for designing controllers for UAVs. In [1] flight control system is based on PID controller, which uses gain scheduling algorithm based on the airspeed to improve performance of the controller is introduced. In [2] PID controller with model inversion is used for autonomous landing for the UAV. Robust nonlinear controller design is employed in [3]. Controllers designed with PID methods might not show the desired performance. Robust control theory provides methods for controllers' design that would produce accurate and fast response in the face of uncertainties or disturbances in the plant model. Robust control design focuses on the implications of model uncertainty. The first important contributions to development of the robust control theory were made by Zames [4] and Zames and Francis [5] in the late 1970s and early 1980s. Later this theory became known as H_∞ optimal control theory. The main idea was to find design techniques that would provide stability of a closed-loop system under the system uncertainties. The works of Athans [6], Safanov [7], Grimble [8] and others show how uncertainty can be modeled and give the concept of the H_∞ norm and μ -synthesis theory. Different perspectives and detailed explanations of the H_∞ technique can be found in the books by Zhou, Doyle, and Glover in [9], [10].

Problem Formulation

The scope of this paper is the development, implementation and comparison of performances of the pitch attitude autopilots for the tactical UAV, designed by means of classical and robust control theories. Robustness of the control system must be guaranteed for the nominal plant, uncertain plant, and for a sensor noise presence. The reason of designing controllers by different control algorithms is to compare which type of the controller would provide better performance when the plant (actual physical model) differs from the nominal model used for controller design. These differences may occur as a result of

linearization of the nonlinear dynamics of the UAV; inaccurate aerodynamic model, which does not reflect the aerodynamic properties of the UAV truly; neglecting presence of the sensor noise during the design of the controller.

6 DOF Mathematical Modeling

Tactical UAV (TUAV) system is used as the platform for this paper.

6-DoF nonlinear model of the TUAV is developed in MATLAB/Simulink. The model consists of several blocks:

- The 6DoF (Euler Angles) block implements an Euler angle representation of six-degrees-of-freedom equations of motion of a vehicle
- Block which contains aerodynamic coefficients and derivatives of the TUAV
- Environment model block, which contains blocks with atmosphere model and gravity model
- Block, which computes the aerodynamic forces and moments using the aerodynamic coefficients, dynamic pressure, center of gravity, and center of pressure
- Block that is used to calculate angle of attack, sideslip angle, and Mach number.

Linearization of Equations of Motion and Stability Analysis

Nonlinear equations of motion are linearized around a specified equilibrium condition: velocity in x-direction in body axis $u_0 = 36 \text{ m/s}$, velocity in z-direction in body axis $w_0 = 1.81 \text{ m/s}$, pitch angle $\theta = 4.4 \text{ deg}$, $Thrust = 100 \text{ H}$. The states that are used to describe longitudinal dynamics are change in body velocity in x direction, body velocity in z direction, change in pitch rate, and pitch angle: $[\Delta u, \Delta w, q, \Delta \theta]$, the input is elevator deflection $\Delta \delta_e$. For a trim condition described above, longitudinal state matrix and input matrix are given below

$$A_{long} = \begin{bmatrix} -0.0304 & 0.3784 & -1.7860 & -9.7514 \\ -0.4208 & -2.5015 & 35.5219 & -0.751 \\ 0.1264 & -2.5188 & -2.96 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{long} = \begin{bmatrix} -0.8761 \\ -7.181 \\ -48.67 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Table 1 contains characteristics of the longitudinal modes of the airplane.

Table 1.

Longitudinal Modes Characteristics

Mode Name	Root Location	Natural Frequency (rad/s)	Period (s)	Damping ratio	Time to Half Amplitude (s)
Short Period	$-2.7317 \pm 9.4696i$	9.855	0.63	0.288	0.252
Phugoid	$-0.0142 \pm 0.3711i$	0.262	23.9	0.076	34.65

Open Loop Response

Open-loop simulation shows response of the open-loop system to the deflection of control surfaces. Giving the elevator input of 5 degrees for the time interval between 10 and 15 seconds system's open-loop response represented by body x and z velocities, and pitch angle is shown in fig. 1 – 3. Simulation is performed through both linear and nonlinear environments and show that response of the linearized model matches response of the nonlinear model.

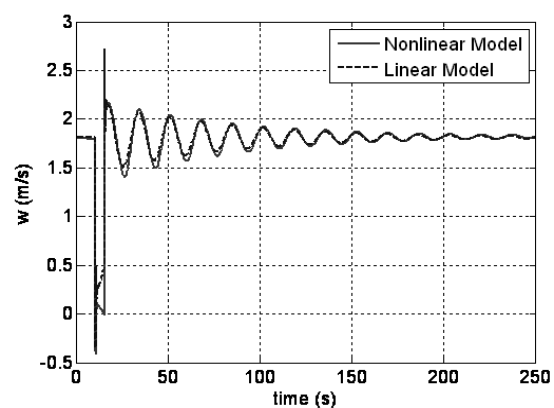
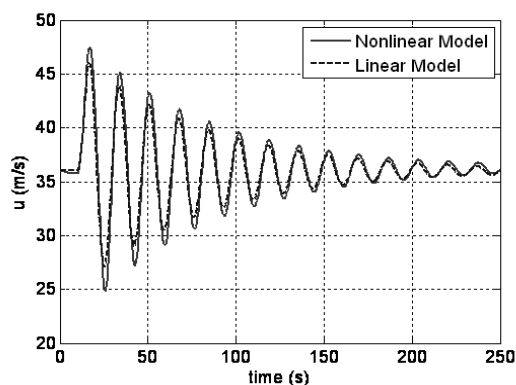


Fig. 1. System Response to Elevator Input: x-body Velocity Fig. 2. System Response to Elevator Input: z-body Velocity

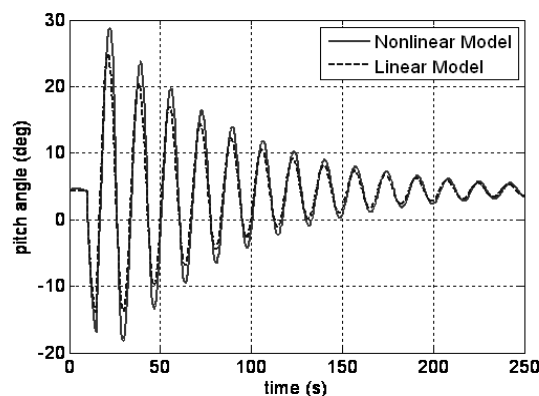


Fig. 3. System Response to Elevator Input: Pitch Angle

Control Problem Definition

Control criteria usually include [11]: reducing the effects of the disturbance of the output; steady-state errors; transient response characteristics; sensitivity to parameter changes in the plant. The following requirements for the system response must be considered and satisfied pending the controller design: overshoot: < 10%; settling time: < 3 sec; rise time: < 1 sec; steady state error: < 2%.

PID Controller Design

The basic block diagram for the closed-loop system of the pitch autopilot is shown in fig. 4. Aircraft dynamics includes linearized longitudinal dynamics of the TUAV and actuator model.

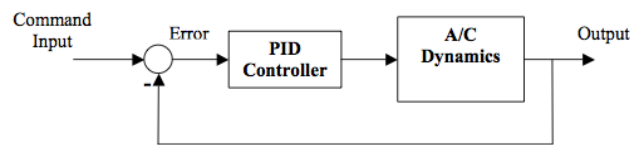


Fig. 4. Basic Control System Configuration

Pitch angle to elevator deflection transfer function is obtained:

$$W_{\theta/\delta e} = -\frac{48.7s^2 + 105.3s + 12.5}{s^4 + 5.4919s^3 + 97.428s^2 + 3.5150s + 13.3973}$$

The transfer function of a PID controller: $G_c = -K_p[1+1/(sT_i)+sT_d]$, where controller parameters (proportional gain, integral time and derivative time) must be determined. Tuning the gains of a PID controller can be done using a design experience or by various design techniques for determining parameters for the controller. [12] gives Ziegler-Nichols rules for tuning PID controllers. [13] presents Ziegler-Nichols Types of Tuning Rule for PID controllers.

An Internal Model Control method (IMC) described in [14] is used for defining the structure of a controller and it introduces a tuning technique for tuning of the controller's gains, so-called IMC-PID tunings. In this work Ziegler-Nichols rule, based on step response of the plant, presented in [12] is used. It should be noted, that a PID controller tuned by Ziegler-Nichols rules would have a response with 10%-60% maximum overshoot. Therefore, experimental tuning is used to adjust parameters of the controller such that it would exhibit desired responses and would perform satisfactory even with a sensor noise presence. Therefore, Ziegler- Nichols tuning rules are very useful in order to find an initial point to start tuning of a PID controller. The following

values of the parameters were obtained: $K_p = 3$, $T_i = 0.46$, $T_d = 0.073$. Then the controller transfer function can be written as:

$$G_c = -3 \left(1 + \frac{1}{0.46s} + 0.073s \right) = -\frac{0.22s^2 + 3s + 6.5}{s}$$

It should be noted, that tuning of the PID controller's coefficients is performed for the nominal plant, however presence of a sensor noise is also taken into account in simulation. Response of a closed-loop system to a unit step input is illustrated in fig. 5. Simulation is performed through the nonlinear environment. Elevator deflection for a unit step input is shown in fig. 6.

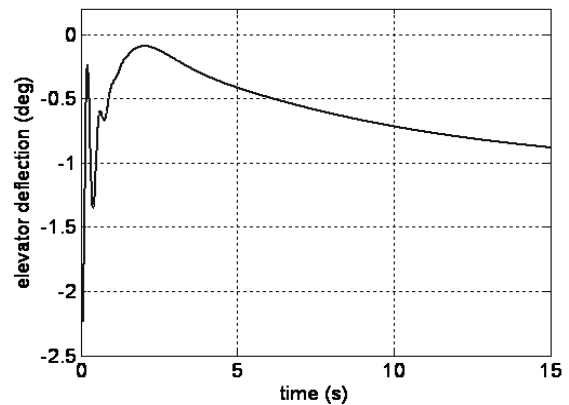
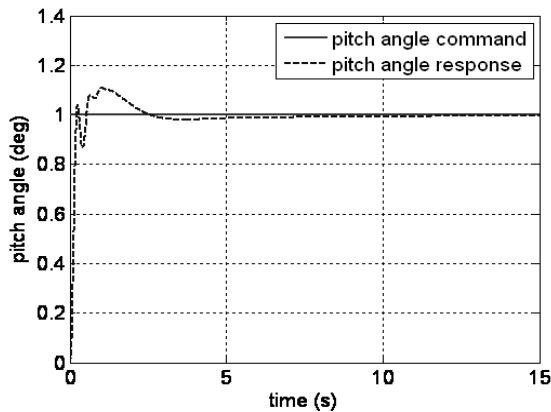


Fig. 5. System Response to a Unit Step Input: Pitch Angle Fig. 6. Elevator Deflection for a Unit Step Input

From the simulation it is seen though the tracking performance of the control system is satisfactory, behavior of control surfaces is not admissible for implementation in a physical system: rate of elevator deflection at the initial input time exceeds the physical limitations.

Robust Controller Design: Problem Formulation

Basic control system configuration is shown in fig. 7. Generalized plant P is Finite Dimensional Linear Time Invariant system.

It is derived from the nominal plant but also includes weighting functions. K represents controller; w is an external input signal, which includes the reference signal, disturbances and noise; u represents control signal; y is a signal that contains measured variables, and z represents the error signals. It is assumed that state space models of P and K are available and

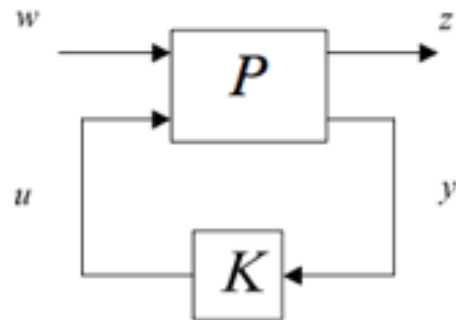


Fig. 7. General Framework

their realizations are assumed stabilizable and detectable [9]. The goal of robust controller is minimization of norm of the transfer function from external input to errors, T_{zw} .

Consider that plant P is partitioned as follows:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} z &= P_{11}w + P_{12}u \\ y &= P_{21}w + P_{22}u \end{aligned}$$

$$z = [P_{11} + P_{12}(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}]w,$$

if $(I - P_{22}K)$ is invertible. When the inverse exists, then

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}. \quad F_l(P, K)$$

is called a lower linear fractional transformation, which is used to indicate the incorporation of a controller K into a system.

H_∞ Controller Design

The main aim of robust design is to find a controller for the system, such that the closed-loop system is robust.

Optimal H_∞ control problem statement is the following: “find all the admissible controllers $K(s)$ such that $\|T_{zw}\|_\infty$ is minimized”. However, for multi input-multi output systems, the procedure of finding the optimal H_∞ controller is very complicated and there is no closed form solution. Therefore, instead of the problem statement given above, another definition of H_∞ control problem is used: “Given $\gamma > 0$, find all admissible controllers $K(s)$, if there is any, such that $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ ”. This problem is called suboptimal H_∞ control problem.

Detailed description of H_∞ design technique and its implementation can be found in references [15] and [16]. Design of the robust controller involves the solutions of Algebraic Riccati Equations (ARE). Therefore, design of the pitch attitude controller for the UAV is performed using MATLAB Robust Control Toolbox. The toolbox enables to compute a stabilizing H_∞ controller K for a given plant P . For design purposes plant P should be partitioned in terms of the number of the disturbances, the control inputs, errors, and the output measurements provided to the controller. Partitioning and system interconnection is also performed with MATLAB tools. The command “hinfyn” solves the problem of robust controller synthesis.

Several weighting functions are defined and must be determined in order to design the controller K . Assuming presence of the multiplicative uncertainty, the main source of which is in change of the aerodynamic parameters of the system. Weighting transfer function W_m represents the multiplicative uncertainty, it must be chosen such that the effect of the uncertainties of

system's parameters will be represented in the best way. For the purposes of this work it is assumed that main source of multiplicative uncertainty is in change of the parameters of the system. It can be found from the Bode plots of the perturbed plants. Weighting transfer function W_p represents the output error, it must be chosen such that the norm $\|W_p S\|_{\infty} < 1$, where S is the sensitivity functions of the system. Having some knowledge about the frequency characteristics of the Sensitivity function, weighting transfer function W_p is chosen as a low-pass filter. Weighting function W_n represents effect of the sensor noise on the system's output. Assume 0.1% noise at low frequencies and 1% noise at high frequencies. It is chosen as a high pass filter. Robust controller is designed using MATLAB "hinf" command, which computes the H_{∞} controller. As a result the state-space model of the controller is obtained such that the controller has 1 output, 1 input, and 8 states, which are internal states of the controller.

In general continuous-time state-space model representation of an object is the following:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

For the H_{∞} controller matrices defined below.

$$A = \begin{bmatrix} 5.49 & -12.16 & -0.3991 & -1.67 & 30 & -0.706 & -1.542 \cdot 10^{-6} & 0.1377 \\ 8 & -0.07287 & -0.1576 & -0.0197 & 0 & 0 & -9.899 \cdot 10^{-6} & -0.5387 \\ 0 & 0.9297 & -0.1519 & -0.01803 & 0 & 0 & -1.548 \cdot 10^{-7} & -0.05193 \\ 0 & -0.02008 & 0.9566 & -0.005155 & 0 & 0 & 6.832 \cdot 10^{-5} & -0.1485 \\ -2.449 \cdot 10^5 & -2.265 \cdot 10^5 & -1.765 \cdot 10^6 & -4.42 \cdot 10^4 & -3.0261 \cdot 10^4 & 6.181 \cdot 10^4 & -5.443 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & -0.03217 & -0.06956 & -0.008252 & 0 & -0.15 & 2.22310 \cdot 10^{-5} & -0.2378 \\ 0 & 0.01525 & 0.03296 & 0.003913 & 0 & 0 & -0.03365 & -22.39 \\ 0 & 0.6645 & 1.437 & 0.176 & 0 & 0 & 0.001013 & -995.1 \end{bmatrix}$$

$$B = [-0.0008 \quad 0.0031 \quad 0.003 \quad 0.0008 \quad 0 \quad 0.0014 \quad 0.1273 \quad -0.0279]^T,$$

$$C = 10^6 \cdot [-1.0352 \quad -0.8852 \quad -6.8965 \quad -0.1748 \quad -0.1182 \quad 0.2415 \quad -2.1271 \quad 0],$$

$$D = 0.$$

Pitch angle response of the nominal plant to the 1deg step command input, which is done by a linear simulation, are given below in fig. 8. Deflection of the control surface that brings pitch angle to the required value is illustrated in fig. 9. Though the input tracking performance of the controller is satisfactory, controller requires very high elevator deflection rate that exceeds the physical limitations of the control surface. In order to avoid saturation of the control surfaces, command filter is added to shape the input signal.

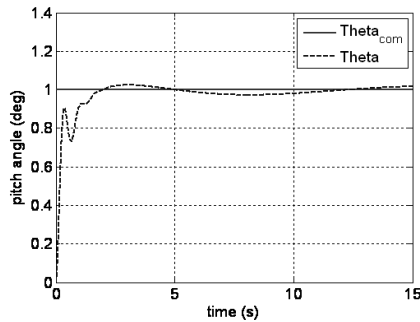


Fig. 8. Step Input Response of the Nominal Plant: Pitch Angle

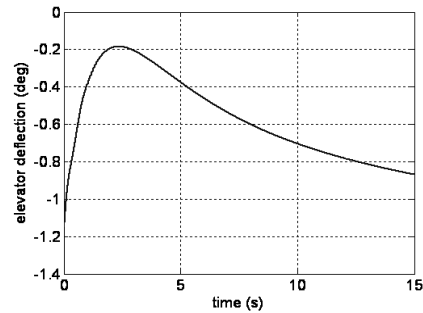


Fig. 9. Elevator Deflection

Robust Performance Analysis

The test for robust performance is performed by “robustperf” command in MATLAB, which gives information about the robust performance margin of the uncertain system. Command “robustperf” provides the information about upper and lower bounds on performance margin and frequency at which the minimum robust performance margin occurs, associated with upper bound on performance margin, and structure of values of uncertain elements associated with upper bound on performance margin ([17], [18]).

The following results are obtained: upper and lower bounds: 0.9434; critical frequency: 0.4921

μ -analysis is performed to compute upper and lower bounds of the Structured Singular Value. The μ -plot is shown in the fig. 10.

Command Filter Implementation to the Control System

Command filters are used in order to shape the command signal so its dynamics matches the dynamics of the vehicle. In [19] a time varying bandwidth command shaping filter, which is used to improve the tracking transient performance, is introduced. [20] explains the usage of a command filter in order to improve a system’s step response: command filter removes high frequency components from a command input, therefore reducing the overshoot of the response. A low pass second order filter is used for purposes of this work. Responses of control system with PID and with robust controller to the filtered command input of 5 degrees on top of the trim value in terms of pitch angle, elevator position and its rate are shown in fig 11-13. Simulation is performed for the nominal nonlinear model of the TUAV.

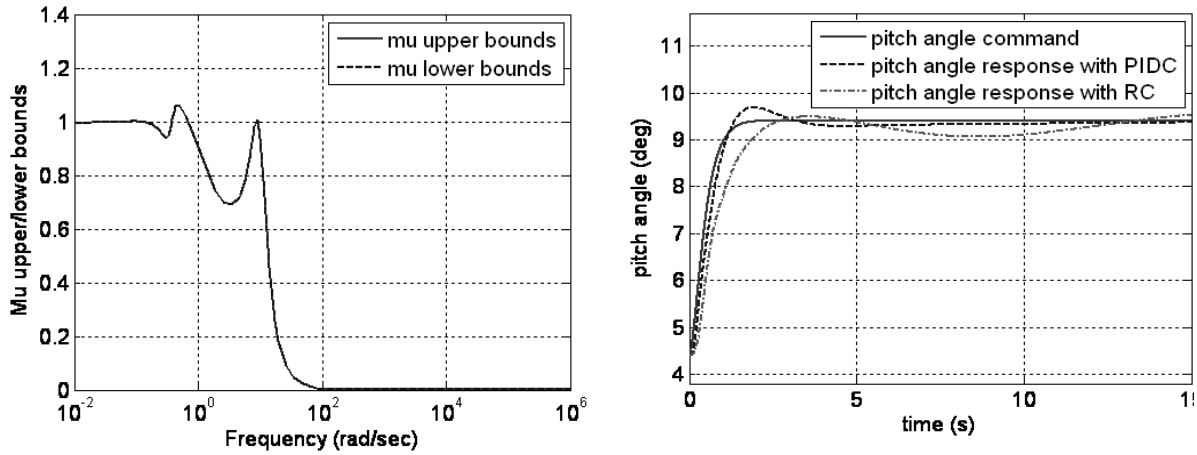


Fig. 10. μ Bounds for Robust Performance Fig. 11. Pitch Angle

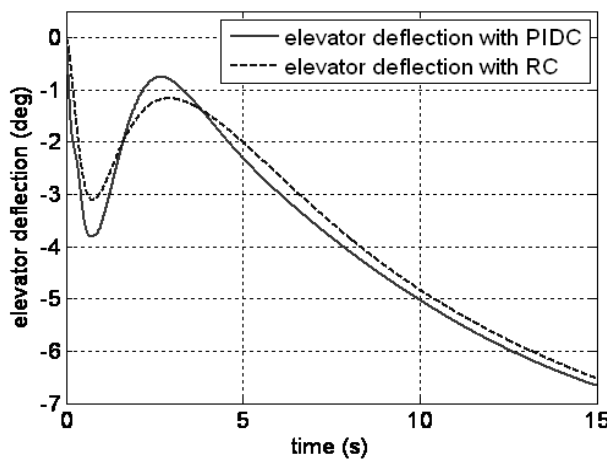


Fig. 12. Elevator Deflection

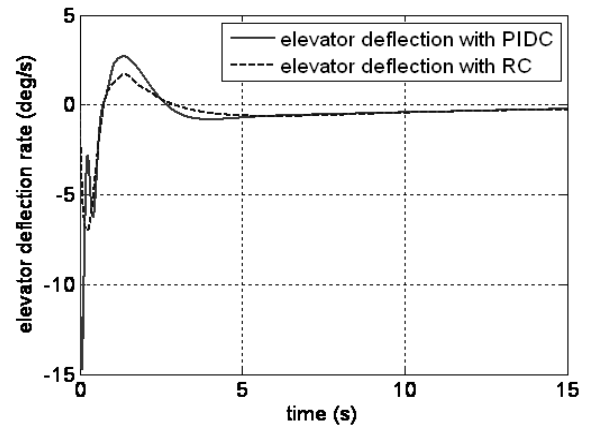


Fig. 13. Elevator Deflection Rate

Performance Comparison of PID and H_∞ Controllers for Uncertain Plant

Consider the nonlinear model of the UAV, which has uncertainties due to variation in aerodynamic derivatives. The most important aerodynamic derivatives that effect stability of the vehicle are static longitudinal stability derivative C_{m_α} and pitch-damping derivative C_{m_q} (for longitudinal dynamics), airplane effective dihedral C_{l_β} and roll-damping C_{l_p} (for the lateral dynamics). Simulation is performed through the nonlinear environment assuming 5% of uncertainty with respect to the nominal value of the parameter (fig. 14-15).

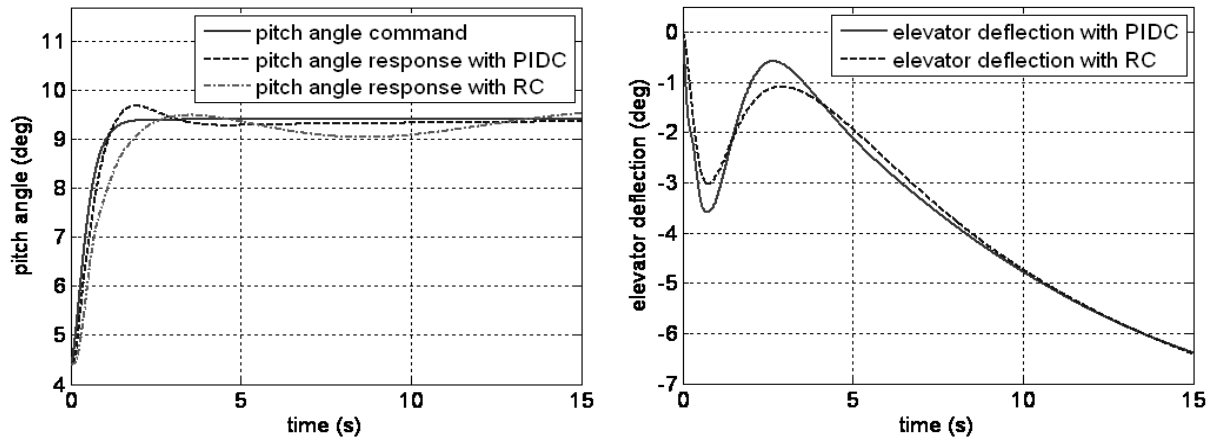


Fig. 14. Pitch Angle Step Response of Uncertain Model Fig. 15. Elevator Deflection of Uncertain Model

Performance Comparison of PID and Robust Controllers with a Sensor Noise Presence

Consider the case when there is a noise, present in the system. Assume, that the sensors are the sources of the noise (sensor noise). Simulation includes responses of the PID and H_∞ control systems to the input, which is shaped by the command filter. Assume presence of the sensor noise with a frequency of 100 Hz and standard deviation of 0.5% of the output nominal value.

Simulation results (fig. 16-18) show that both PID and robust controllers show good performance in tracking the input command.

However, the PID controller is more sensitive to the noise than the robust controller; it considers noise as a reference input and tries to follow it. This is clearly seen from the position of the control surface, and its rate. Minimization of the actuator's efforts as well as taking sensor noise into account by H_∞ algorithm is performed systematically during the design of the controller.

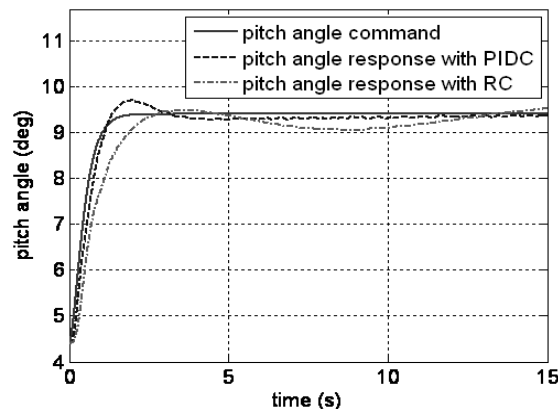


Fig. 16. Pitch Angle Response

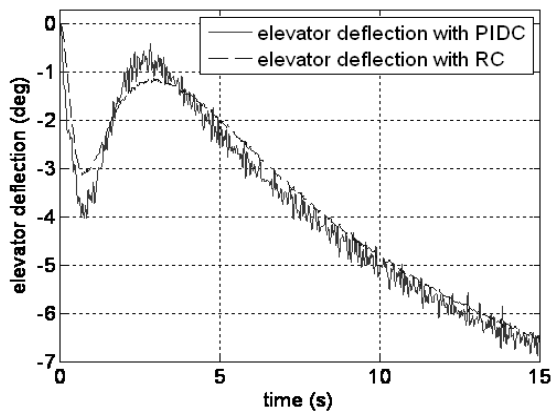
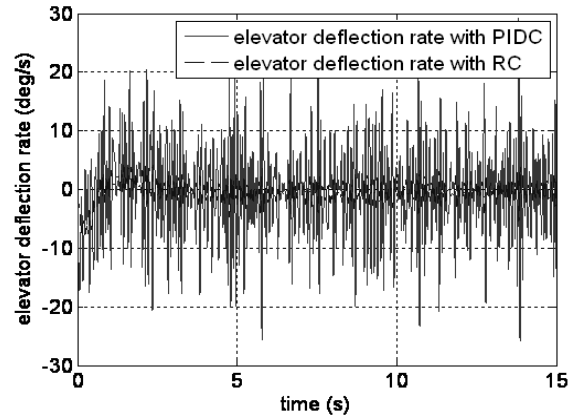


Fig. 17. Elevator
Response

Deflection Fig. 18. Elevator Deflection Rate
Response



As a result of this work, the pitch attitude controller is designed for the TUAV. Two different techniques are used for the controller design. PID controller is developed by methods of the classical control theory and robust controller is developed by the H_∞ design technique. Designing a PID controller, it is impossible to take into account the uncertainties, which are present in the model parameters. The H_∞ design technique, which is used for the robust controller design, considers the uncertainties of the model's parameters and the disturbances, which act upon the system. Simulations are performed for the nominal model, for model that includes uncertainties due to variation in aerodynamic derivatives, and for the case when sensor noise is taken into account. It should be noted, that when sensor noise is present response of the controller designed by H_∞ technique is better than response of the control system with a PID controller. The most efficient way to decrease sensitivity of the PID controller to the noise is decreasing the derivative time T_d . However, this effects the response of the system by increasing overshoot and settling time. Therefore, a trade-off decision should be made with respect to system's performance and its noise rejection capabilities.

References

1. *Fu Xu, Zhou Zhaoying, Xiong Wei*, "MEMS-Based Low-Cost Flight Control System for Small UAVs", Tsinghua Science and Technology, vol.13, №5, 2008.
2. *V.Kargin, I.Yavrucuk*, "Autolanding Strategies for a Fixed wing UAV Under adverse Atmospheric Conditions", American Institute of Aeronautics and

-
- Astronautics, Guidance, Navigation and Control Conference, Honolulu, HI, USA, August 2008.
3. *M. Sadraey, R. Colgren*, “Robust Nonlinear Controller Design for a Complete UAV Mission”, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Keystone, Colorado, Aug. 21-24, 2006.
 4. *G. Zames*, “Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-26, 1981.
 5. *G. Zames and B.A. Francis*, “Feedback, Minimax Sensitivity, and Optimal Robustness”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-28:585–600, 1983.
 6. *Athans, M.*, “The Role and Use of the Stochastic Linear-Quadratic-Gaussian Problem in Control System Design”, *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-16, 1971.
 7. *Safanov, M.G.*, “Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems”, M.I.T. Press, Cambridge, 1980.
 8. *Grimble, M.J. and Johnson, M.A.*, “Optimal Control and Stochastic Estimation: Theory and Application”, Vols 1 and 2, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1988.
 9. *K. Zhou, J.C. Doyle*, “Essentials of Robust Control”, Prentice Hall, 1998.
 10. *K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover*, “Robust and Optimal Control”, Prentice Hall, 1996.
 11. *Charles L. Phillips, Royce D. Harbor*, “Feedback control systems”, Prentice Hall, 1991.
 12. *Ogata, Katsuhiko*, “Modern Control Engineering”, Prentice Hall, 2002.
 13. *Cheng-Ching Yu*, “Autotuning of PID Controllers: A Relay Feedback Approach”, Springer, 2006.
 14. *Morari, Manfred*, “Robust Process Control”, Prentice Hall, 1989.
 15. *J. C. Doyle, K. Glover, P.P Khargonekar, B. A. Francis*, “State-space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems”, AC-34:831–847, 1989.
 16. *S. Ariki*, “A New System Invariant and an Algebraic Proof of the Standard H_∞ Problem”, Conference Proceeding, 35th Conference on Decision and Control, 1996.
 17. The MathWorks website, “<http://www.mathworks.com>”, as accurate of July 28, 2009.
 18. “Robust Control Toolbox for Use with MATLAB”, User’s Guide, The MathWorks, Inc., 2001.
 19. *Mickle, M. C., Zhu, J. J.*, “Simulation Results for Missile Autopilot Design Based on Extended Mean Assignment”, System Theory, Proceedings of the Twenty-Eight Southern Symposium, 1996.
 20. *George Ellis*, “Observers in Control Systems: A Practical Guide”, Academic Press, 2002.

Д. Ю. Падакін, Т. В. Стеценко

КОРЕКЦІЯ АВТОНОМНОЇ СИСТЕМИ НАВІГАЦІЇ СУДНА СИГНАЛЬНИМИ МОРСЬКИМИ БУЯМИ

Вступ

Автономні навігаційні системи (АНС), які використовують алгоритми обчислення навігаційних координат, накопичують похибки через неточність датчиків первинної навігаційної інформації – кутових швидкостей (або кутів) повороту та прискорень поступальних переміщень. Для підвищення точності АНС необхідна корекція її показань і показань датчиків навігаційної інформації, для чого застосовують зовнішню інформацію. Одним з найбільш розповсюджених джерел такої інформації є приймачі супутникових навігаційних систем GPS, Глонас [1,2]. Останні в багатьох випадках дають задовільну точність, але не завжди при цьому можуть задовольняти за іншими показниками (вартість, надійність, доступність та ін.).

В той же час в морській та річковій навігації поширене застосування сигнальних буїв [3], які весь час вдосконалюються [4], а їх можливості розширюються. Такі пристрої мають точно визначені координати закріплення до донної поверхні (заякорення). Будучи ідентифікованими та внесеними до навігаційних карт, сигнальні буї можуть бути використані для корекції показань АНС та її датчиків навігаційної інформації.

Постановка задачі

Розглянемо морську автономну навігаційну систему, яка визначає координати судна та його курс шляхом обчислення за показаннями акселерометрів (a_x, a_y), та компаса (К) або датчика кутової швидкості (ω_c).

Нехай координати точки корекції А (ТК) – точки встановлення буя А (A_ξ, A_η), які відомі точно. АНС обчислює поточні координати судна

$$\begin{aligned} S_{\xi\pi} &= \sum_{i=1}^n (x_{i\pi} \cos K_{i\pi} - y_{i\pi} \sin K_{i\pi}), \\ S_{\eta\pi} &= \sum_{i=1}^n (y_{i\pi} \cos K_{i\pi} + x_{i\pi} \sin K_{i\pi}) \end{aligned} \quad (1)$$

де $x_{i\pi} = \iint_0^{t_i} a_x (dt)^2$, $y_{i\pi} = \iint_0^{t_i} a_y (dt)^2$ – вдавене переміщення судна в напрямку зв'язаних з ним осей x, y ; $K_{i\pi}$ – вдаваний курс судна на інтервалі часу t_i , які зв'язані з реальними переміщеннями x_i, y_i, K_i

$$x_{i\pi} = x_i + \Delta x_i, \quad y_{i\pi} = y_i + \Delta y_i, \quad K_{i\pi} = K_i + \Delta K_i.$$

оді похибка визначення навігаційних координат судна в т. А буде

$$\begin{aligned}\Delta S_{\xi\Pi} &= \sum_{i=1}^n (\Delta x_i \cos K_i - \Delta y_i \sin K_i) - \sum_{i=1}^n (y_i \cos K_i + x_i \sin K_i) \Delta K_i, \\ \Delta S_{\eta\Pi} &= \sum_{i=1}^n (\Delta y_i \cos K_i + \Delta x_i \sin K_i) - \sum_{i=1}^n (y_i \sin K_i - x_i \cos K_i) \Delta K_i.\end{aligned}\quad (2)$$

Похибки визначення координат поступального переміщення зумовлені похибками акселерометрів Δa_x , Δa_y :

$$\Delta x_i = \iint_0^{t_i} \Delta a_x (dt)^2, \quad \Delta y_i = \iint_0^{t_i} \Delta a_y (dt)^2,$$

а похибка курсу – похибками гіроскопу $\Delta\omega$, яка в залежності від способу вимірювання курсу буде [5,6]

$$\begin{aligned}\Delta K_i &= (\cos K_i \Delta\omega_{xi} - \sin K_i \Delta\omega_{yi}) \omega_\eta^{-1}, \quad \Delta K_i = \Delta\omega_x \omega_\eta^{-1}, \\ \Delta K_i &= \int_0^{t_i} \Delta\omega_z dt, \quad \omega_\eta = \Omega \cos \varphi - v_y \sin K_i R_3^{-1},\end{aligned}\quad (3)$$

Ω – кутова швидкість Землі, R_3 – її радіус, v – швидкість судна.

Знайдемо оцінки похибок гіроскопів та акселерометрів, вважаючи їх центрованими гаусовими процесами, і оцінки похибок навігаційних координат судна.

Модель похибок навігаційної системи

Нехай в деякий момент часу $T = \sum_{i=1}^n t_i$ судно проходить через точку корекції А, координати якої визначаються як координати місцезнаходження буя з похибками ΔA_ξ , ΔA_η . Тоді між параметрами навігаційної системи

$$A_{\xi\Pi} = A_\xi + \Delta A_{\xi\Pi}, \quad A_{\eta\Pi} = A_\eta + \Delta A_{\eta\Pi}$$

та параметрами буя

$$A_{\xi B} = A_\xi + \Delta A_\xi, \quad A_{\eta B} = A_\eta + \Delta A_\eta$$

встановимо залежність

$$A_{\xi\Pi} - A_{\xi B} = \Delta A_{\xi\Pi} - \Delta A_\xi, \quad A_{\eta\Pi} - A_{\eta B} = \Delta A_{\eta\Pi} - \Delta A_\eta, \quad (4)$$

в якій похибки навігаційної системи визначаються з (2).

Очевидно з (2), що коли похибки гіроскопа та акселерометра змінюються з часом, задача їх оцінки вирішується методами динамічної фільтрації. В цьому випадку повинен бути організований процес визначення відносного положення судна та буя на певному проміжку часу.

У випадку одного можливого вимірювання відносного положення (або збігання положень судна та буя) оцінювання навігаційних похибок потребує припущення про їх постійність на проміжку часу T між корекціями

$$\Delta x_i = \Delta x, \quad \Delta y_i = \Delta y, \quad \Delta K_i = \Delta K.$$

Тоді

$$\begin{aligned} A_{\xi\pi} - A_{\xi\text{в}} &= \Delta A_{\xi\pi} - \Delta A_{\xi} \\ &= \Delta x \cos K - \Delta y \sin K - (y \cos K + x \sin K)\Delta K - \Delta A_{\xi c} \\ &\quad - \Delta A_{\xi r}, \\ A_{\eta\pi} - A_{\eta\text{в}} &= \Delta A_{\eta\pi} - \Delta A_{\eta} \\ &= \Delta y \cos K + \Delta x \sin K - (y \sin K - x \cos K)\Delta K - \Delta A_{\eta c} \\ &\quad - \Delta A_{\eta r}, \end{aligned} \tag{5}$$

де ΔA_c – систематична похибка буя, ΔA_r – випадкова похибка буя, яку приймемо за гаусів процес, $\cos K = \sum \cos K_i$, $\sin K = \sum \sin K_i$, $y \cos K = \sum y_i \cos K_i$, $x \sin K = \sum x_i \sin K_i$.

Як слідує з (5), задача корекції навігаційної системи зводиться до знаходження оптимальної оцінки $\Delta \hat{A}_\pi = [\Delta \hat{A}_{\xi\pi}, \Delta \hat{A}_{\eta\pi}]$ похибки ΔA навігаційної системи по одиничному значенню $A_\pi - A_\text{в} = [A_{\xi\pi} - A_{\xi\text{в}}, A_{\eta\pi} - A_{\eta\text{в}}]$ та апріорній інформації про похибки ΔA_r , ΔA_π (Δx , Δy , ΔK).

Оцінювання похибок та алгоритм корекції АНС

Позначимо $A = [A_\xi, A_\eta]^T$, тоді (5) прийме вигляд

$$A_\pi - A_\text{в} = \Delta A_\pi - \Delta A_c - \Delta A_r.$$

Оцінка $\Delta \hat{A}_\pi$ та її коваріаційна матриця R будуть визначатись [7] залежностями

$$\begin{aligned} \Delta \hat{A}_\pi &= K_0 (A_\text{в} + \Delta A_c - A_\pi), \\ R &= R_\pi - K_0 R_\text{в}, \quad K_0 = R_\pi (R_\pi + R_\text{в})^{-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

в яких R_π , $R_\text{в}$ – коваріаційні матриці похибок навігаційної системи та буя. У випадку некорельованих похибок з рівними дисперсіями отримаємо

$$\Delta \hat{A}_\pi = [\Delta \hat{A}_{\xi\pi}, \Delta \hat{A}_{\eta\pi}]^T = \frac{1}{2} (A_\text{в} - A_\pi + \Delta A_c). \tag{7}$$

Оскільки буй не дає можливості визначити курс судна при його проходженні через точку корекції, система (5) є неспостережливою, і для отримання оцінок похибок гіроскопів та акселерометрів АНС необхідно ввести додаткове рівняння зв'язку між похибками. Встановимо її аналогічно [8], прийнявши припущення, що акселерометри АНС ідентичні та функціонують в умовах однакових збурень, які викликають випадкові

Г і р о с к о п і ч н і с и с т е м и

похибки акселерометрів. Тоді можна вважати ці похибки взаємозв'язаними. В першому наближенні будемо вважати їх статистично однаковими.

З (5) та (7) отримаємо оцінки

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x} = \Delta \hat{y} &= [-\Delta \hat{A}_{\xi n} (y \sin K - x \cos K) + \Delta \hat{A}_{\eta n} (y \cos K + x \sin K)] \Delta^{-1}, \\ \Delta \hat{K} &= [-\Delta \hat{A}_{\xi n} (\cos K + \sin K) + \Delta \hat{A}_{\eta n} (\cos K - \sin K)] \Delta^{-1}, \\ \Delta &= (x \sin K \\ &+ x \cos K \\ &+ y \cos K \\ &- y \sin K) \cos K + (x \sin K - x \cos K + y \cos K + y \sin K) \sin K. \end{aligned} \quad (8)$$

Використовуючи оцінки похибок (7), (8), знайдемо уточнені значення навігаційних параметрів судна, які обчислює АНС на k -му кроці після корекції вимірів,

$$A_{n(j)}^* = A_{n(j)} - \Delta \hat{A}_n, \quad K_{n(j)}^* = K_{n(j)} - \Delta \hat{K}, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} A_{n(j)} &= A_B + \left[- \sum_{i=1}^k x_{in} \cos K_{in} + y_{in} \sin K_{in} \quad \sum_{i=1}^k x_{in} \sin K_{in} + y_{in} \cos K_{in} \right] \\ &\quad + \Delta A_w \\ \Delta \hat{A}_{\xi n} &= \Delta \hat{x} \sum_{i=1}^k (\cos K_{in} - \sin K_{in}) - \Delta \hat{K} \sum_{i=1}^k (x_{in} \sin K_{in} + y_{in} \cos K_{in}), \\ \Delta \hat{A}_{\eta n} &= \Delta \hat{x} \sum_{i=1}^k (\sin K_{in} + \cos K_{in}) + \Delta \hat{K} \sum_{i=1}^k (x_{in} \cos K_{in} - y_{in} \sin K_{in}), \end{aligned}$$

ΔA_w – похибки показань (вимірювань).

Прийнявши похибки буя, похибки АНС та похибки показань АНС незалежними величинами, знайдемо з (9) дисперсію навігаційних параметрів АНС на k -му кроці обчислень

$$D = D_B + kD_n + kD_I, \quad D = \sigma^2. \quad (10)$$

Дисперсія показань АНС D_n може прийматись як дисперсія білого шуму. Дисперсія похибки АНС D_I визначається з залежностей (5), (9), $D_I = D_a + D_K$, D_a, D_K – дисперсії похибок акселерометра та компаса.

Оцінювання похибок координат буя

Для оцінювання похибок заякореного буя, що знаходиться в умовах вітру та хвилювання водної поверхні, використаємо залежності (9), з яких отримуємо

$$\Delta A_c = \{\xi_A; \eta_A\}, \Delta A_r = \{l \sin \theta \cos B; l \sin \theta \sin B\} \quad (11)$$

В (11) $\xi_A = \sqrt{l_\Lambda^2 - l_0^2} \cos B$, $\eta_A = \sqrt{l_\Lambda^2 - l_0^2} \sin B$ – координати точки закріплення якірного ланцюга до буя; l – довжина буя; B – кутовий напрямок вітру чи течії; l_Λ – довжина якірного ланцюга; l_0 – глибина моря від нижнього кінця незбуреного буя; θ – кут нахилу буя,

$$\theta = \theta_c - c_K \sin(kt - \alpha_1) + c_{K\alpha} \sin(kt - \alpha - \alpha_1) + c_{2K} \cos(2kt - \alpha_2) \quad (12)$$

$$\theta_c = \frac{c_b d [(1 - h_H)^2 - \frac{1}{2} b^2 + 2 h_H Y_g]}{2 c_\theta} V_b^2, \quad c_K = \frac{c_b b d h_H}{I_{zG} \sqrt{(\omega^2 - k^2)^2 + 4 \zeta^2 k^2 \omega^2}} V_b^2,$$

$$c_{2K} = \frac{c_b d b^2 V_b^2}{4 I_{zG} \sqrt{(\omega^2 - 4k^2)^2 + 16 \zeta^2 k^2 \omega^2}}, \quad c_{K\alpha} = \frac{c_K k_1^2}{\sqrt{(k_1^2 - k^2)^2 + 4 \xi^2 k_1^2 k^2}}$$

V_b – швидкість вітру; a, k – амплітуда та частота хвилювання водної поверхні; ω, k_1 – частоти вільних кутових та вертикальних коливань буя; h_H – довжина зануреної частини буя в стані спокою.

Виключаючи найбільш несприятливі випадки збігання частоти хвилювань водної поверхні з частотами вільних коливань буя [9], вважаючи буй спроектованим з врахуванням умов експлуатації, з (12) знайдемо середньоквадратичні значення кута нахилу

$$\tilde{\theta}^2 = \theta_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 c_{Ki}^2, \quad (13)$$

за яким оцінюються похибки ΔA_r (11).

При нерегулярних збуреннях буй буде здійснювати нерегулярну хитавицю по куту θ_H , яку будемо визначати як

$$\theta_H = \theta - \theta_c. \quad (14)$$

Кореляційна функція хитавиці може бути прийнята у вигляді

$$R(\tau) = D_x e^{-n|\tau|} \left(\cos \omega \tau + \frac{n}{\omega} \sin \omega |\tau| \right),$$

де дисперсія D_x , коефіцієнт затухання n знаходяться з експериментальних випробувань, ω – частота кутових коливань буя.

Дисперсія кута нахилу буя

$$D_{\theta} = \theta_c^2 + D_x = \sigma_{\theta}^2 \quad (15)$$

визначає величину похибки оцінювання випадкових складових переміщення координат буя.

Висновки

Отримані співвідношення та залежності дозволяють побудувати алгоритм корекції автономної навігаційної системи судна, яка обчислює його координати та курс, за даними точкових вимірювань при проходженні судном повз буй, або через визначене відносно нього положення.

Цей підхід дозволяє використовувати заякорений буй для оцінювання похибок навігаційної системи та їх компенсації і показує необхідність мати на борту судна паспортизовані дані про динамічні характеристики буя та метеорологічні дані в районі навігації.

Список використаної літератури

1. *Дмитриев С. П., Степанов О. А., Кошаев Д. А.* Исследование способов комплексирования данных при построении инерциально–спутниковых систем // Интегрированные инерциально–спутниковые системы. – Спб. – 2004. – с. 43–59.
2. *Корекція руху судна за допомогою супутникової навігаційної системи*//Наук. вісті НТУУ КПІ. – 2005. – №1.– С.107–110.
3. *Берто Г.* Океанографические буи. – Л.: Судостроение, 1979. – 215 с.
4. *Симоненко С.В., Збруцький О.В., Падакін Д.Ю.* та ін. Навігаційний буй. Патент на корисну модель №u2008 13735 від 28.11.2008.
5. *Смирнов Е. Л., Яловенко А.В., Воронов В.В.* Технические средства судовождения.–Спб.: Элмор, 1996.–543с.
6. *Збруцький О. В., Старицький Л. П.* Малогабаритний гірокомпас на динамічно настроюваному гіроскопі// Наук. вісті НТУУ КПІ. – 1997. – №1.– С.58–63.
7. *Дмитриев С. П.* Инерциальные методы в инженерной геодезии / С. П. Дмитриев. – Спб: ГНЦ РФ–ЦНИИ «Электроприбор», 1997. – 344 с.
8. *Zbrutsky A., Rahmouni M.* Intelligence algorithms for increasing navigation system accuracy // Intelligent Information and Engineering Systems/ – 2008. – # 12/ – p.
9. *Симоменко С. В., Падакин Д. Ю., Борис А. Н., Стеценко Т. В.* Оценка точности морского столбовидного буя как средства навигационного

УДК 62–52

О. М. Нечипоренко, О. В. Загора**МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБ'ЄКТА КЕРУВАННЯ ДЛЯ СИНТЕЗУ
КВАЗІОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ****Вступ**

Метод декомпозиції, як метод дослідження систем керування, природний для багатьох прикладних завдань та полягає у заміні задачі на еквівалентну кількість підзадач [1]. Він використовується, зокрема, для аналізу системи керування деякими динамічними об'єктами (літальними апаратами, супутниками і т.п.) за допомогою інерційного виконавчого механізму, двигуна та ін. [2], [3].

В статті розглянуто метод синтезу квазіоптимальних по швидкодії керувань, заснований на декомпозиції об'єкта керування.

Постановка задачі

Нехай маємо керований об'єкт O , диференціальне рівняння якого має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, \delta) \\ y = (y^1, \dots, y^n) \end{cases}, \quad (1)$$

де $y(t)$ – вектор фазових координат, y^1, \dots, y^n – фаза від координати, $\delta(t)$ – функція керування.

При оптимізації керування за швидкодією, часто необхідно розглядати сукупну систему рівнянь – власне об'єкта і виконавчого механізму [4].

Якщо представити $y = (x^1, x^2, u^1, \dots, u^{n-2})$, де x^1, x^2 – фазові координати підоб'єкта O_1 , u^1, \dots, u^{n-2} – координати вектора керування (виконавчого механізму), то можна здійснити декомпозицію об'єкта O на два підоб'єкта: O_1 – $(n-2)$ -го порядку:

$$\square u = f_1(u, \delta), u = (u^1, \dots, u^{n-2}), \quad (2)$$

і O_2 – 2-го порядку:

$$\square x = f_2(x, u), x = (x^1, x^2), u = (u^1, \dots, u^k), k \leq n-2, \quad (3)$$

де x – вектор фазових координат O_1 , u – вектор керувань O_2 .

Задача зводиться до синтезу оптимального по швидкодії керування δ для об'єкта O , який описаний системою диференціальних рівнянь (1), причому кінцевий стан частини фазових координат u^1, \dots, u^{n-2} може бути довільним, а

$$|u| \leq 1, \quad (4)$$

$$|\delta| \leq \delta_{\max}. \quad (5)$$

Суть методу декомпозиції об'єкту керування для синтезу оптимального керування

Відомо [3, 4], що оптимальне керування $u^0(t)$ для об'єкта (3) при обмеженнях (4) є кусково–неперервним і має кінцеве число розривів першого роду.

Наявність динамічного підоб'єкта O_1 накладає додаткові обмеження на $u(t)$ (на безперервність як $u(t)$, так, можливо, і її вищих похідних). Однак, зрозуміло, що й у цьому випадку оптимальне керування $u(t)$ для O_2 повинне бути близьким до ідеального кусково–неперервного керування $u^0(t)$ і при розширенні класу вхідних сигналів $u(t)$ до узагальнених функцій – збігатися до $u^0(t)$.

Виходячи з загального критерію швидкодії, вважаємо, що квазіоптимальним керуванням $\delta(t)$ є таке кусково–неперервне керування δ , яке забезпечує на виході O_1 функцію керування $u(t)$ для O_2 , що складається зі стаціонарних ділянок ± 1 , вихід на які здійснюється по кривих максимальної швидкодії для підоб'єкта O_1 . Спосіб визначення моментів і числа переходів $u(t)$ з одного стаціонарного значення в інше приводиться нижче.

Вигляд ідеального скалярного керування $u^0(t)$ і відповідного йому реального керування $u(t)$, а також $\delta(t)$ (якщо O_1 – подвійний інтегратор) наведений на рис. 1 *а*, *б*, *в*. Випадку *б* відповідає плавний вихід $u(t)$ на обмеження, випадку *в* – з кінцевою швидкістю (наприклад, вихід на обмеження типу "упор").

Відзначимо, що завдання визначення оптимального за швидкістю керування $\delta(t)$ для O_1 , яке переводить $u(t)$ з однієї конкретної точки в іншу (з 0 в ± 1 або з ± 1 у ∓ 1), не представляє особливих труднощів. Зокрема, задача оптимального по швидкодії виводу виконавчих механізмів або приводів на режим досить добре вивчена. Тому рівняння відрізків oa , bc і т. д. (див. рис. 1, б) вважаємо визначеними. На практиці їх можна одержати як реакцію O_1 на максимально припустимі імпульсні функції δ_{\max} і апроксимувати підходящими аналітичними функціями.

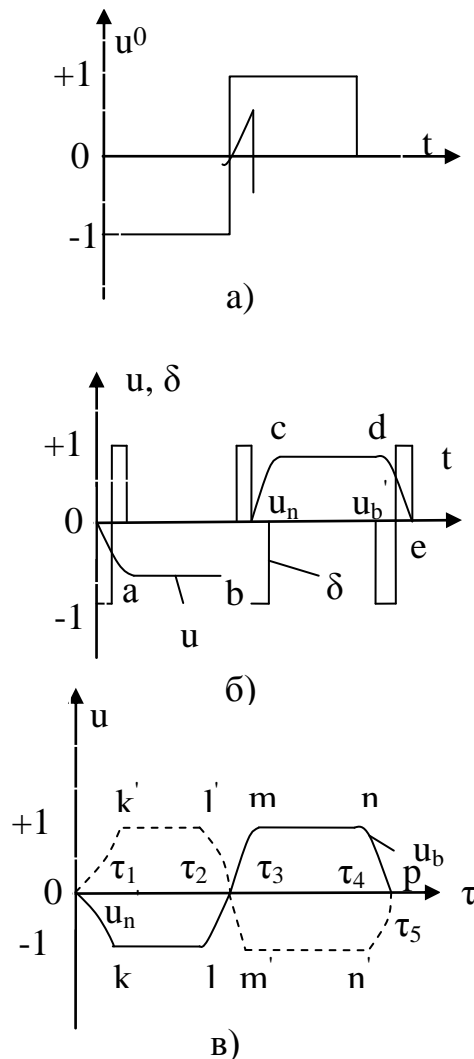


Рис. 1. Графіки а) – ідеального $u^0(t)$ і б), в) – реальних $u(t)$ керувань

Для демонстрації розглянутого методу, скористаємося наступним рівнянням підоб'єкта O_2 у формі Коші:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = u + G_0, \quad |u| \leq 1, \quad (6)$$

де x, y – фазові координати O_2 , u – керування для O_2 , G_0 – стала, що характеризує припустимі задавальні та збурюючі впливи.

Проведемо визначення $u(x, y)$, потім за виглядом u визначимо $\delta(x, y)$.

Фазові траєкторії на ділянках стаціонарності $u(t) = \pm 1$ представляють собою параболи (рис. 2). На кінцевому етапі керування: (вимикання, лінія de на рис. 1, б; лінія np на рис. 1, в) рух зображувальної точки буде відбуватися під впливом керування $u_b(t)$ протягом часу $\tau_b = \tau_5 - \tau_4$. Інтегруючи систему (6) при $u = u_b(t)$ ($u = -u_b(t)$) у зворотному часі при нульових початкових умовах, визначаємо збільшення фазових координат Δx , Δy за час τ_b при зворотному русі з початку координат в попереджуючу точку вимикання N_4 (N'_4). Значення Δx , Δy визначають положення початку вимикання керування u . Перехідна фазова траєкторія в цих точках сполучається з фазовими траєкторіями руху зображувальної точки під впливом керування $u = \pm 1$. Ці траєкторії являють собою параболи ($BN_4, B'N'_4$ на рис. 2), що проходять через точки $(\Delta x; \Delta y)$, $(\Delta x'; \Delta y')$.

Для того, щоб зображувальна точка, потрапила на ці траєкторії після проходження попередньої ділянки, де $u = \pm 1$, необхідно почати перемикання в деякій попереджуючій точці. Вид і положення попереджуючої лінії перемикання визначається в такий спосіб. Підставимо в рівняння (6) значення керування $u(t)$ на ділянках bc , lm (див. рис. 1 б, в), яке позначимо $u_n^+(t)$ або $u_n^-(t)$ залежно від напрямку перемикання. Проінтегруємо (6) у зворотному часі й визначимо збільшення (приріст) $\Delta \bar{x}$, $\Delta \bar{y}$ на відрізку τ_n (часу перемикання з +1 в -1 або навпаки). Відмітимо, що Δx залежить від ненульового початкового значення y , розташованого на лінії $BN_4(B'N'_4)$. Зрушимо криві BN_4 , $B'N'_4$ (іншими словами кожну точку BN_4 , $B'N'_4$) у напрямку, який є зворотним руху зображувальної точки на попередньому відрізку. У результаті одержимо рівняння кривих перемикання виду: $x - \Delta \bar{x} = \varphi^+(y - \Delta \bar{y})$, $x - \Delta \bar{x} = x - \Delta \bar{x} = \varphi^-(y - \Delta y')$, де $x = \varphi^+(y)$, і $x = \varphi^-(y)$ – рівняння BN_4 , $B'N'_4$ відповідно.

Відзначимо, що при включенні керування рух зображувальної точки також відбувається по деякій перехідній кривій.

З рис. 2 видно, що потрапити в початок координат з одним перемиканням $u(t)$ можна лише для точок, розташованих у зоні I (зона I – справа і вище QRP , ліворуч і нижче $Q'R'P'$).

Якщо зображувальна точка перебуває в зоні II (зона II – між $AON'_4R'Q'$ і $A'ON_4RQ$), її можна перевести в зону I. Для цього необхідно включити керування на +1(-1), а потім перемкнути на -1(+1). Справді,

відстань між лініями AO і PR ($A'O$ і $P'R'$) у точності відповідає довжині перехідної фазової траєкторії при русі під впливом керувань $u_b(t)$ і $u_n(t)$.

Якщо зображувальна точка перебуває в зоні III (зона III – між AON_4RP і $A'ON_4R'P'$), її можна перевести на лінію QR ($Q'R'$). Для цього необхідно спочатку включити керування на $+1(-1)$, $u = u_b(t)$. Потім на лінії $CN'_4(C'N_4)$, розташованій від $AO(A'O)$ на відстані, що проходить фазова точка за час τ_b під дією управління $u_b(t)$, почати перемикавання на $-1(+1)$, $u = u_n(t)$. При цьому зображувальна точка по перехідній траєкторії потрапить на лінію $QR(Q'R')$.

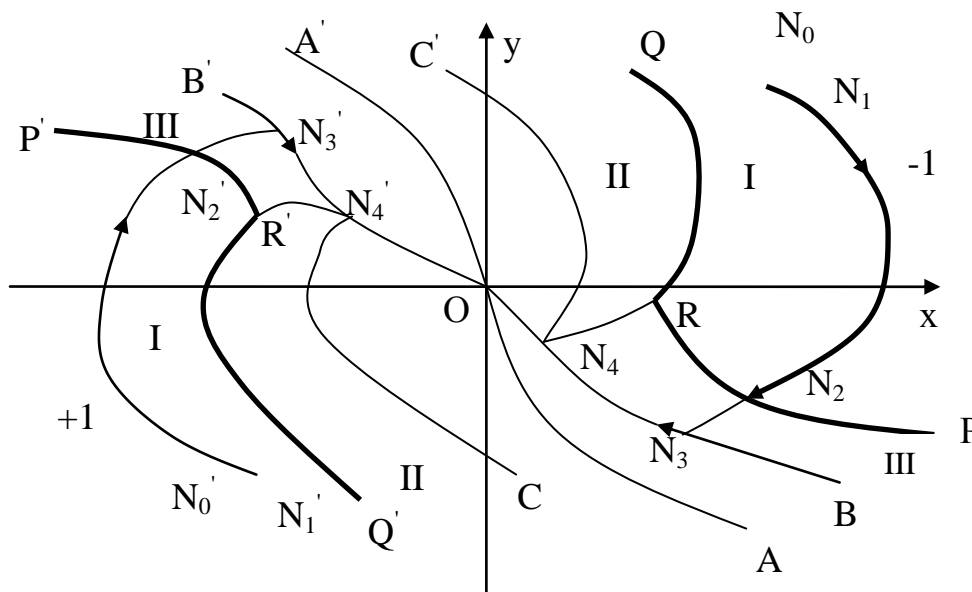


Рис. 2. Фазовий портрет аналізованої системи

Для реалізації оптимального керування обчислювальним пристроєм необхідно виділити зони I, II, III за допомогою кривих PRQ , $P'R'Q'$ та ін. (рис. 2) і визначити початкове положення зображувальної точки. Необхідно також запам'ятати положення точок N_4 , N'_4 початку вимикання керування й лінії $CN'_4(C'N_4)$ перемикавання керування при знаходженні зображувальної точки у зоні III. По виду $u[x(t)]$ обчислювальним пристроєм легко синтезується $\delta[x(t)]$ шляхом розв'язання (2) відносно δ .

Зрозуміло, що реалізація оптимального керування ускладнилася в порівнянні з системами другого порядку. Однак це природно, оскільки аналізована система є системою високого порядку.

Розглянемо загальний вид рівняння підоб'єкта O_2 :

$$\dot{x}^1 = a_1^1 \cdot x^1 + a_2^1 \cdot x^2 + u^1, \quad \dot{x}^2 = a_1^2 \cdot x^1 + a_2^2 \cdot x^2 + u^2, \quad |u| \leq 1. \quad (7)$$

У цьому випадку керування $u(t)$ має, загалом, більш, ніж одне перемикання, тобто на фазовій площині є декілька ліній перемикання [4]. Синтез керувань u^1, u^2 із гладкими кривими переходу на стаціонарні рівні проводиться аналогічно викладеному вище.

Визначаються попереджуючі точки вимикання керування й виробляється зрушення кривих перемикання проти руху зображувальної точки. Якщо кожна компонента u має свої криві вимикання, перемикання або різні рівні обмеження, то для кожної з них будується своя попереджуюча точка вимикання й крива перемикання.

Приклад використання методу декомпозиції

Розглянемо систему керування нейтральним об'єктом за допомогою інерційного виконавчого механізму. Рух об'єкта O_2 опишемо системою

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = u + G_0, \quad (8)$$

де τ – безрозмірний час.

Завдання полягає в синтезі оптимального по швидкодії керування u для системи (8) за умови, що $|u| \leq 1$, та інерційності виконавчого механізму, що реалізує $u(t)$.

Позначимо $\delta_{\max} = M$. Нехай у результаті експерименту й апроксимації отримані наступні криві (*ok*, *lm*, *np* та ін.) максимального розгону (рис. 1, в), вигляд яких визначається динамікою виконавчого механізму, а їхні рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} ok: u &= -M\tau^2, \quad ok': u = M\tau^2, \quad \tau = (0, \tau_1), \\ lm: u &= M \cdot \tau - \tau_2^2 - 1, \quad lm': u = 1 - M(\tau - \tau_2)^2, \quad \tau = (\tau_2, \tau_3), \\ np: u &= M \cdot (\tau - \tau_4)^2, \quad np': u = M(\tau - \tau_4)^2 - 1, \quad \tau = (\tau_4, \tau_5). \end{aligned} \quad (9)$$

З системи (8) визначаємо для ділянок $u = \pm 1$ рівняння фазових траєкторій на площині x, y : $x = \frac{y^2}{2 \cdot (y + G_0)} + D$, де D – постійна. Цим же

рівнянням можна скористатися й на ділянках, де $u \neq \text{const}$, розглядаючи $u(\tau)$ як параметр, що приймає фіксовані значення в кожний момент часу. Фазовий портрет оптимальної системи керування при $G_0 < 1$ представлений на рис. 2.

Визначимо положення точки $N_4(N'_4)$ початку вимикання керування. Інтегруючи систему (8), зрушену по осі τ в точку τ_4 при $u = 1 - M(\tau - \tau_4)^2$ у зворотному часі при зміні τ від τ_5 до τ_4 ($\tau_5 - \tau_4 = \Delta\tau_1$), одержимо

$$\begin{aligned}
y_4 - y_H = y_4 &= -\left(\frac{2}{3} + G_0\right) \cdot t_1, \\
y_H = 0; y_4 - y_H = y_4 &= \left(\frac{5}{12} + \frac{G_0}{2}\right) \cdot \Delta\tau_1^2, \\
x_H = 0, M &= \frac{1}{\Delta\tau_1^2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Аналогічно (10) $x'_4 = \left(-\frac{5}{12} + \frac{G_0}{2}\right) \cdot \Delta\tau_1^2$, $y'_4 = -\left(\frac{2}{3} - G_0\right) \cdot \Delta\tau_1$.

Рівняння лінії $BN_4(B'N'_4)$ визначається проходженням через точку $N_4(x_4, y_4)$, $N'_4(x'_4, y'_4)$:

$$BN_4: x = \frac{y^2}{2 \cdot 1 + G_0} + C,$$

$$C = x_4 - \frac{y_4^2}{2 \cdot 1 + G_0}, \quad (y < 0);$$

$$B'N'_4: x = \frac{y^2}{2 \cdot (G_0 - 1)} + C',$$

$$C' = x'_4 - \frac{(y'_4)^2}{2 \cdot (G_0 - 1)}, \quad (y > 0).$$

Лінія перемикання $PR(P'R')$ зміщена відносно $BN_4(B'N'_4)$ на збільшення (приріст) $(\Delta\bar{x}, \Delta\bar{y})$, які проходить точка, що зображує, при зміні керування по кривій np (див. рис. 1, в).

Інтегруючи систему рівнянь (8), зрушену по осі τ у точку τ_2 при $u = M(\tau - \tau_2)^2 - 1$ у зворотному часі від τ_3 до τ_2 ($\tau_3 - \tau_2 = \Delta\tau_2$), одержуємо:

$$\Delta\bar{y} = -\frac{Mt_2^3}{3} + \Delta\tau_2 - G_0\Delta\tau_2 = \left(\frac{1}{3} - G_0\right) \cdot \Delta\tau_2,$$

$$M = \frac{2}{\Delta\tau_2^2},$$

$$\Delta\bar{x} = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} \cdot G_0\right) \Delta\tau_2^2 - y_3 \Delta\tau_2.$$

Збільшення $\Delta\bar{x}$ залежить від ненульового початкового значення y_3 . Але точка y_3 є поточною точкою кривої BN_4 , яку зрушуємо на $(\Delta\bar{x}, \Delta\bar{y})$. Тому y_3 вважаємо просто поточною координатою у цієї кривої.

Рівняння відрізка PR лінії перемикавання мають вигляд $x = \frac{(y - \Delta\bar{y})^2}{2 \cdot (1 + G_0)} + C + \Delta\bar{x}$. Після підстановки в це рівняння значень $\Delta\bar{x}$, $\Delta\bar{y}$ і

зведення подібних членів одержимо

$$x = \frac{\left(y - \frac{4}{3} \cdot \Delta\tau_2\right)^2}{2 \cdot (1 + G_0)} - \frac{\frac{1}{3} + \left(\frac{7}{3} + 2G_0\right)}{2 \cdot (1 + G_0)} \cdot \Delta\tau_2^2 + C.$$

Управління відрізка $P'R'$ лінії перемикавання визначається аналогічно

і має вигляд $x = \frac{\left(y + \frac{4}{3} \cdot \Delta\tau_2\right)^2}{2 \cdot G_0 - 1} - \frac{\frac{1}{3} + \left(2G_0 - \frac{7}{3}\right)}{2 \cdot G_0 - 1} + C'$.

Керування $\delta(t)$ на вході виконавчого механізму визначається по отриманому керуванню $u(t)$ за умовою максимального швидкого виходу виконавчого механізму на режими у відомі моменти часу 0 , τ_2 , τ_4 .

Висновки

Запропонований інженерний метод декомпозиції об'єкта керування вище другого порядку, заснований на декомпозиції об'єкту керування n -го порядку на два підоб'єкта $(n-2)$ -го і 2 -го порядків, можна застосовувати для аналізу систем керування з релейним кусочно-неперервним керуванням, яке має обмеження $|u| \leq 1$, а також для синтезу оптимального (за швидкодією) виконавчого пристрою системи керування при використанні методу фазового простору.

Список використаної літератури

1. Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, А.В. Лагутин, О.Г. Иванова, В.М. Тютюнник. Специальные разделы теории управления. Оптимальное управление динамическими системами. – Тамбов: Издательство ТГТУ, 2007. – 103 с.
2. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. — М.: Высш. шк., 1989. – 263 с.
3. Пархоменко В.Л., Нечипоренко О.М. Метод синтезу оптимального управління // Науковий вісник Академії муніципального управління: Серія «Техніка». Вип.1. Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології управління. За заг. ред. В.К.Присяжнюка. – К.: Видавничо-поліграфічний центр Академії муніципального управління, 2008. – С. 93–101.

4. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления — М.: Наука, 1969.

Н. Г. Черняк

АВТОГЕНЕРАТОРНЫЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН НА ОСНОВЕ ТЕХНИКИ ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

Введение

В настоящее время на основе достижений акустоэлектроники сформировалось новое направление в измерении механических величин (МВ) – измерительные преобразователи (ИП) МВ на поверхностных акустических волнах (ПАВ) [1].

В литературе рассмотрены отдельные вопросы построения математических моделей, разработки конструкций и технологий изготовления ИП МВ на ПАВ. Научные публикации, посвященные всем вопросам разработки (от физико–математического моделирования до изготовления и испытаний) ИП МВ на ПАВ практически отсутствуют.

Постановка задачи

В статье представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований по созданию различных ИП МВ на ПАВ – линейных ускорений (ИП ЛУ), давлений (ИПД), линейных (ИП ЛМП) и угловых (ИП УМП) микроперемещений, линейных (ИП ЛП) и угловых (ИП УП) перемещений. Классификация по физическим принципам построения рассматриваемых ИП МВ [1] показана на рис. 1.

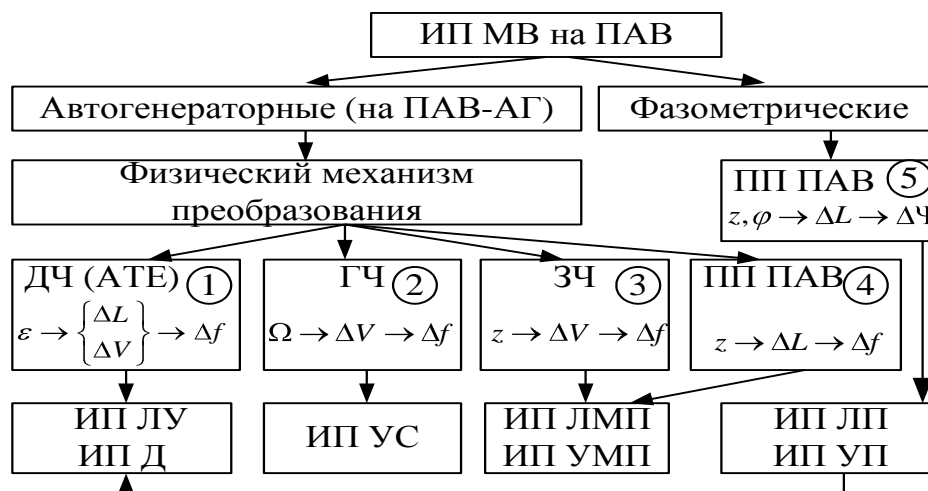


Рис. 1. Классификация ИП МВ на ПАВ

На рис. 1 обозначено: ДЧ, ГЧ, ЗЧ – деформационная, гироскопическая и зондовая чувствительности ПАВ–автогенератора (ПАВ–АГ); АТЭ – акустоэлектронный тензоэффект; ПП ПАВ – чувствительность к перемещению подвижного приёмника ПАВ.

В первой части статьи рассмотрены автогенераторные ИП МВ на ПАВ, во второй части – фазометрические ИП.

Автогенераторные ИП ЛУ и ИПД на акустоэлектронном тензоэффекте

В ИП МВ на основе акустоэлектронного тензометрического эффекта в качестве универсального функционального преобразователя ФВ используется высокостабильный перестраиваемый ПАВ–автогенератор, состоящий из регулируемой под воздействием измеряемых механических величин линии задержки (ЛЗ) на ПАВ 1, которая включена в цепь положительной обратной связи широкополосного усилителя 2 (рис. 2).

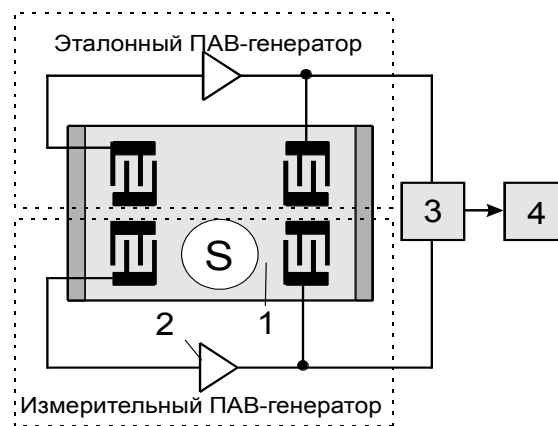


Рис. 2. Функциональная схема автогенераторных ИП МВ

Относительная девиация частоты ПАВ–АГ определяется выражением [2]

$$\Delta f / f_0 \approx \Delta V / V_0 - \Delta L / L_0, \quad (1)$$

где ΔV и ΔL – изменения фазовой скорости ПАВ и акустической длины ЛЗ при воздействии на область S внешних измеряемых x_i , дестабилизирующих ξ_i величин и изменения температуры ΔT .

Для повышения чувствительности ИП и устранения влияния дестабилизирующих факторов используется дифференциальная схема, в которой выходные сигналы с разными частотами от двух измерительных (или от эталонного и измерительного) ПАВ–автогенераторов поступают на смеситель 3, а затем с помощью фильтра низких частот 4 выделяется

сигнал разностной частоты, которая содержит информацию о измеряемой механической величине.

На основе ряда исходных положений кристаллографии и нелинейной теории упругости влияние x_i и ξ_i , воздействующих на сложнопрофилированные чувствительные элементы (ЧЭ) ИП, строго приводится к пространственному термо–напряженно–деформированному состоянию $\varepsilon_V^0(x_i, \xi_i)$, $\varepsilon_T^0(\Delta T)$ характерных участков поверхности ЧЭ, а изменение фазовой скорости ПАВ ΔV однозначно связывается с происходящими изменениями модулей упругости второго рода $\Delta C_{\alpha\beta}^0(\varepsilon_V^0, \varepsilon_T^0)$ по причине сложной физической нелинейности монокристаллов и изменением плотности $\Delta\rho^0(\varepsilon_V^0, \varepsilon_T^0)$ материала звукопровода [2]. Последующее аналитическое решение сложной волновой задачи о деформационной ($\kappa \varepsilon_V^0$), температурной ($\kappa \varepsilon_T^0$) и гироскопической (κ угловой скорости вращения звукопровода Ω) чувствительностях ПАВ–АГ позволило представить формулу (1) в виде [2]

$$\frac{\Delta f}{f_0} \approx K_\xi S_p \varepsilon_{ij}^0 + K_T \Delta T + \frac{K_\Omega \Omega}{2\pi f_0} - \frac{\Delta L}{L_0}, \quad (2)$$

где $S_p \varepsilon_{ij}^0 = (\varepsilon_{V11} + \varepsilon_{V22} + \varepsilon_{V33})$; $K_\varepsilon, K_T, K_\Omega$ — коэффициенты деформационной, температурной и гироскопической чувствительности фазовой скорости ПАВ, которые теоретически и экспериментально определены для следующих материалов звукопровода [1]:

– монокристаллический α –кварц ST–среза ($K_\varepsilon = -0,73$;

$K_T = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$; $K_\Omega = -0,085$);

– слоистая структура: плавленый кварц – пьезоэлектрическая пленка окиси цинка ($K_\varepsilon = 4,25$; $K_T = 61,5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$; $K_\Omega = -0,043$).

Функциональная схема и конструкция ИП ЛУ (акселерометра) типа 2SA показаны на рис. 3, а ИПД типа 2SP – на рис. 4 [3, 4].

Основываясь на выражении (2) в статье [3] впервые теоретически получено и подтверждено экспериментально аналитическое выражение, описывающие деформационную (κ деформации ε_V) и температурную ($\kappa \Delta T$) чувствительности ПАВ–АГ

$$f_j = f_{j0}(1 + \chi_\varepsilon \varepsilon_{Vj} + \chi_{T1} \Delta T + \chi_{T2} \Delta T^2 + \chi_{T3} \Delta T^3), \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

где f_{j0} – начальные частоты генерации входящих в дифференциальную схему автогенераторов ($f_{20} = 78,8 \text{ МГц}$, $f_{10} = 79 \text{ МГц}$); χ_ε – коэффициент

Гироскопичні системи

ДЧ ПАВ–АГ; χ_{T1} , χ_{T2} , χ_{T3} – коэффициенты его ТЧ. В таблице приведены числовые значения этих коэффициентов.

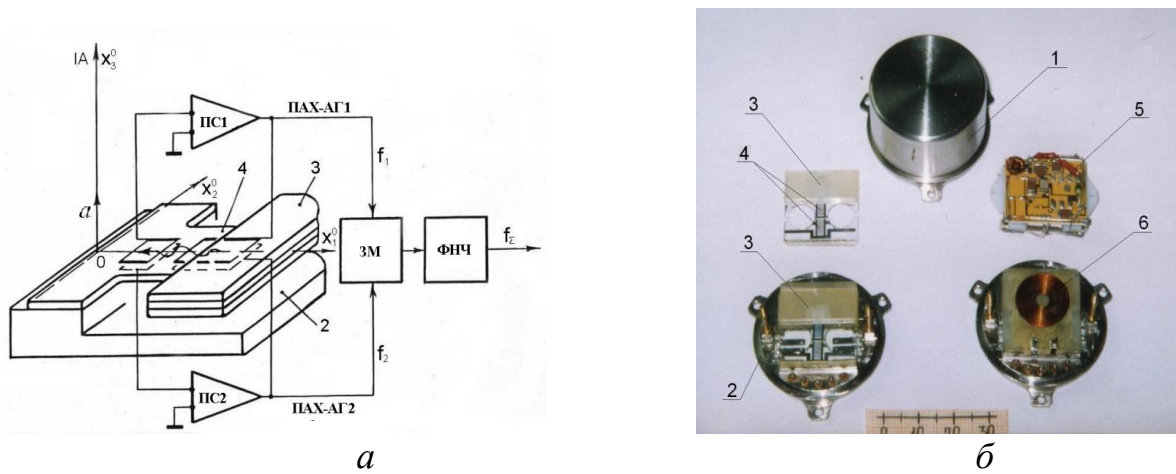


Рис. 3. Функциональная схема (а) и конструкция (б) ИП ЛУ типа 2SA:
1 – акселерометр в сборе; 2 – основание; 3 – маятниковый кварцевый ЧЕ; 4 – ЛЗ на ПАВ; 5 – электронная плата; 6 – термодатчик

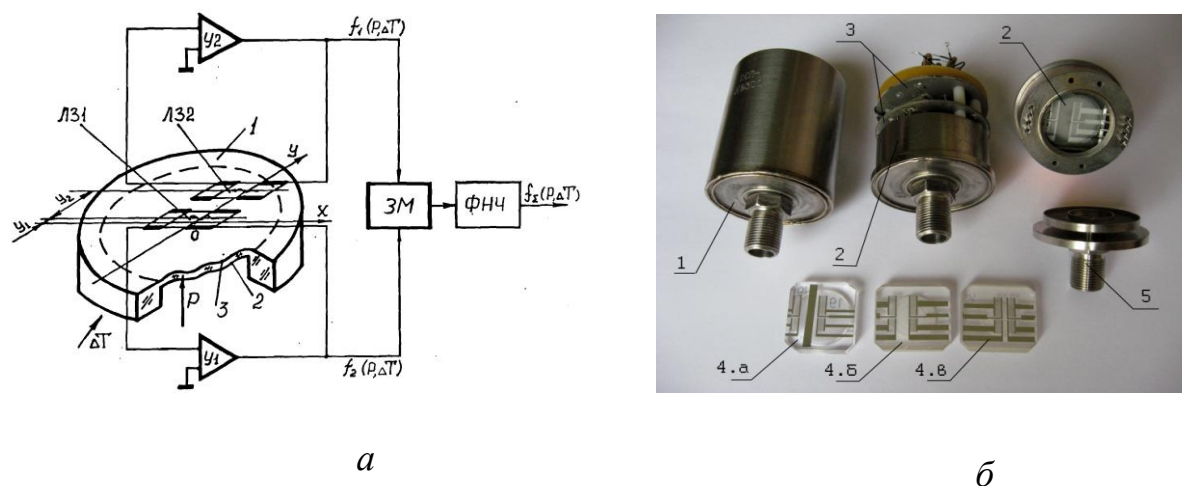


Рис. 4. Функциональная схема (а) и конструкция (б) ИПД типа 2SP:
1 –ИПД в сборе; 2 – узел ЧЭ ; 3 - электронные платы; 4 – кварцевый мембранный ЧЭ с ЛЗ на ПАВ (варианты исполнения);
5 – штуцер

Таблица.

Коэффициенты чувствительностей ПАВ–АГ

Материал ЧЕ	χ_{ε}	$\chi_{T1},$ $\cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$\chi_{T2},$ $\cdot 10^{-8} \text{ } ^\circ\text{C}^{-2}$	$\chi_{T3},$ $\cdot 10^{-10} \text{ } ^\circ\text{C}^{-3}$
Y-зріз $\alpha - \text{SiO}_2$	-0,90	2,80	0	0
ST-зріз $\alpha - \text{SiO}_2$	-1,44	0	-1,25	0
AT-зріз $\alpha - \text{SiO}_2$	-1,10	0	0	0,40
ZnO – $\text{SiO}_{2\text{пл}}$	1,85	5,0	0	0

Лучшие метрологические характеристики ИП ЛУ типа 2SA и ИПД типа 2SP в диапазоне рабочих температур от минус 60 до +80 °С обеспечиваются при изготовлении его ЧЭ из пьезокварца Y-среза [3, 4].

На основании (3) и данных таблицы получены расчетные выражения для выходной частоты f_{Σ} и частот генерации автогенераторов f_j ($j = 1, 2$) такого ИП ЛУ при действии измеряемого ускорения a и ΔT с учетом долговременного времени эксплуатации t акселерометра (вызывает старения поверхностей ЧЭ, по которым распространяется ПАВ) [3]:

$$f_1 = f_{10}(1 + k_a a + k_T \Delta T + k_{t1} t); \quad f_2 = f_{20}(1 - k_a a + k_T \Delta T + k_{t2} t);$$

$$f_{10} = f_{20} + f_{\Sigma 0}; \quad f_{20} \approx 78,75 \text{ МГц}; \quad f_{\Sigma 0} \approx 150 \text{ кГц};$$

$$f_{\Sigma} = f_1 - f_2 \approx f_{\Sigma 0}(1 + k_T \Delta T + k_{t\Sigma} t) + k_{\Sigma} a; \quad k_{\Sigma} \approx 2 f_{20} k_a;$$

$$k_a \approx \frac{3ml}{bh^2 E} \chi_{\varepsilon} \dots \quad (4)$$

В формулах (4) обозначено: f_{Σ} – функция преобразования (ФП) акселерометра; $f_{\Sigma 0}$, k_{Σ} – смещение нуля и коэффициент преобразования ФП; k_a – коэффициент, который зависит от физических (m – масса ЧЭ, E – модуль Юнга материала ЧЭ) и геометрических (l , b , h – длина, ширина и толщина упругого подвеса ЧЭ) характеристик ЧЭ; $k_T = \chi_{T1}$; $k_{t\Sigma} = k_{t1} - k_{t2} \approx (0,1 \dots 0,5) \cdot 10^{-4} \cdot \text{год}^{-1}$ – коэффициент долговременной нестабильности смещения нуля ФП. Подобные расчетные выражения получены и для ИПД [4].

Опытные партии ИПЛУ типа 2SA и ИПД типа 2SP изготавливались на Черниговском радиоприборном заводе. Измерительные преобразователи обеспечивают следующие технические характеристики:

1. Диапазон измерения (Д):

– ИП ЛУ $\pm(1;5;10;20;50;100) \text{ г}$;
 – ИПД $(1,6 \dots 63) \cdot 10^2 \text{ кПа}$;

2. Погрешности смещения нуля:

– дрейф в запуске $(1 \dots 5) \cdot 10^{-4} \text{ Д/ч}$;
 – нестабильность от запуска к запуску $(1 \dots 5) \cdot 10^{-4} \text{ Д}$;

3. Погрешность коэффициента преобразования $0,05 \dots 0,25 \%$;

4. Температурные погрешности:

– смещения нуля $5 \cdot 10^{-4} \text{ Д/}^\circ\text{С}$;
 – коэффициента преобразования $5 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{С}$;

5. Полоса пропускания (ИП ЛУ) 200 Гц ;

6. Диапазон рабочих температур $-60 \dots +80 \text{ }^\circ\text{С}$.

Автогенераторные ИП линейных и угловых микроперемещений на основе зондовой чувствительности ПАВ–АГ

Измерительные преобразователи на основе возмущения электрического поля ПАВ (зондовая чувствительность ПАВ–АГ) используют эффект изменения фазовой скорости ПАВ и, как следствие частоты генерации ПАВ–АГ, возникающий при перемещении механического зонда (мембраны) в электрическом поле волны, распространяющейся по поверхности пьезоэлектрического звукопровода [5].

В этом случае также используется дифференциальная схема функционального преобразователя на основе двух ПАВ–АГ (рис. 2). Механический зонд 2 (рис. 5) в виде металлической или диэлектрической пластины (мембрана, шток) перемещается в электрическом поле линии задержки 1, потенциал которого изменяется экспоненциально при удалении от поверхности звукопровода на измеряемое расстояние x

$$\varphi = \varphi_0 \exp(-2\pi x / \lambda_0), \quad (5)$$

где φ_0 — потенциал электрического поля на поверхности звукопровода; $\lambda_0 = V_0 / f$; V_0 и λ_0 — фазовая скорость, и длина ПАВ на свободной поверхности звукопровода; f — частота ПАВ.

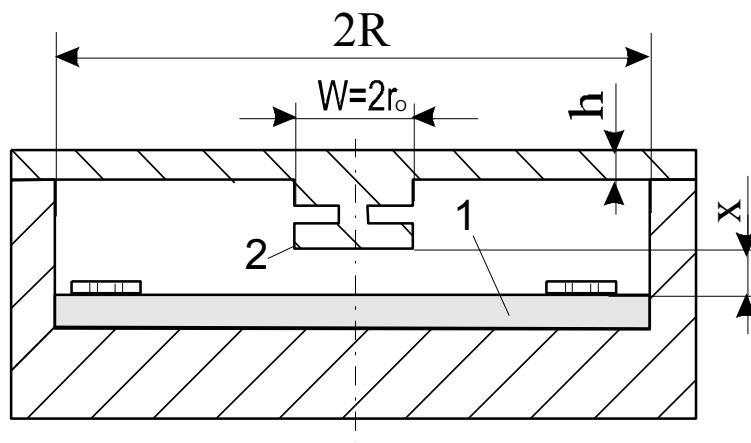


Рис. 5. Конструкция, поясняющая принцип ЗЧ ПАВ-АГ: 1 – ЛЗ; 2 – подвижный зонд

Приращение частоты выходного сигнала измерительного ПАВ–АГ, с учетом изменения фазовой скорости волны под зондом, определяется соотношением [5]

$$\Delta f = \frac{NV_0}{L} \int_{x_1}^{x_2} S_V dx, \quad (6)$$

где: L — акустическая длина линии задержки; $S_V = \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial x}$ — крутизна дисперсионной характеристики; $N = W / \lambda_0$ — число длин волн на возмущенном участке W звукопровода.

При больших значениях N , характерных для ПАВ, коэффициент преобразования может быть достаточно большим даже при малых значениях крутизны дисперсионной характеристики, значение которой определяется конструктивными и физическими параметрами зонда и пьезоэлектрического звукопровода. В качестве звукопровода целесообразно использовать сильные пьезоэлектрики (ниобат лития, германат висмута, окись цинка и др.).

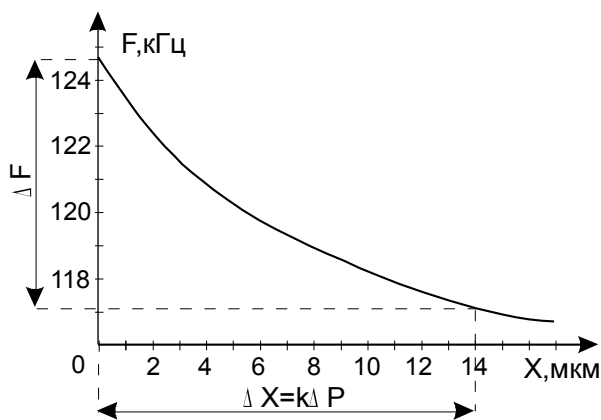


Рис.6. Экспериментальная зависимость ЗЧ ПАВ-АГ

составила $S_x = 0,5$ кГц/мкм.

Рассматриваемый ИП можно использовать, например, для измерения давления [6]. При этом перемещение жесткого центра мембраны под воздействием измеряемого давления P (рис. 5) определяется соотношением

$$x = kP, \quad (7)$$

где $k = \frac{3(1-\mu^2)C^4 - 1 - 4C^2 \ln C}{16C^4 E h^3} R^4$; $C = R/r_0$; R и r_0 — рабочий радиус

мембраны и радиус ее жесткого центра; μ и E — коэффициент Пуассона и модуль упругости материала мембраны; h — толщина мембраны (для малых прогибов $x/h \ll 1$).

Используя формулы (6) и (7), приращение частоты ПАВ-АГ может быть записано в виде

Экспериментальные исследования подтвердили эффективное воздействие зонда на частоту генерации ПАВ-АГ при изменении зазора в интервале $0 \leq x \leq 0,15\lambda_0$. Исследуемый макетный образец ПАВ-АГ был изготовлен на подложке из ниобата лития YZ — среза. Зонд, выполненный из меди, перемещался в интервале $0 \dots 14,0$ мкм (рис. 6).

При этом средняя чувствительность преобразователя линейных микроперемещений

$$\Delta f = \frac{NV_0}{L} \int_{x_1}^{x_2} S_p dP,$$

где $S_p = kS_V$.

Расчеты показывают, что при использовании мембраны, выполненной из стали, с конструктивными параметрами $R = 0,02$ м, $r_0 = 0,005$ м, $h = 0,001$ м, $E = 2,2 \cdot 10^{11}$ Н/м² и $\mu = 0,28$ коэффициент $k = 1,22 \cdot 10^{-10}$ м³/Н.

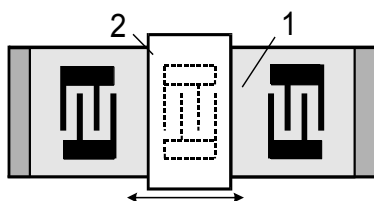
Соответственно, например, при воздействии измеряемого давления $P = 1,2 \cdot 10^5$ Н/м² ≈ 900 мм.рт.ст. перемещение жесткого центра мембраны составит $x = 0,15\lambda_0 = 14,5$ мкм, а средняя чувствительность ИП давления будет $S_p = 7,8$ кГц/мм.рт.ст. Изменение конструктивных параметров линии задержки на ПАВ и мембраны позволяет создавать ИПД с различными диапазонами измерения.

Рассмотренный пример показывает, что ИП линейных (угловых) микроперемещений на эффекте зондовой чувствительности ПАВ–АГ могут быть использованы для разработки ИП ускорений, давления и силы.

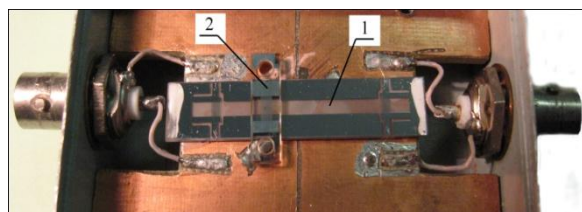
Автогенераторные ИП линейных и угловых микроперемещений с подвижным приёмником ПАВ

В автогенераторных ИП ЛМП и ИП УМП с подвижным приёмником ПАВ изменение частоты генерации осуществляется в соответствии с (1) за счет изменения акустической длины ЛЗ $\Delta L(z)$ при перемещении z подвижного приёмника ПАВ [1, 5].

В таких ИП приемник ПАВ 2 (рис. 7) выполняется в виде напыленного на пьезоэлектрическую подложку встречно–штыревого преобразователя, который перемещается вдоль поверхности пьезоэлектрического звукопровода линии задержки на расстоянии $\Delta = 0,3 \dots 0,7 \lambda_0$ от его поверхности. При выполнении этого условия через воздушный зазор, посредством сопровождающего ПАВ электрического поля, замыкается цепь положительной обратной связи ПАВ–АГ.



а)



б)

Рис. 7. Эскиз (а) и конструкция (б) ИП ЛМП с подвижным приёмником ПАВ: 1 – звукопровод ПАВ; 2 – подвижный приёмник ПАВ

Перемещение приемника вдоль звукопровода приводит к линейному (нелинейность менее 0,05%) изменению частоты измерительного ПАВ–АГ определяемому, на основании (1), выражением

$$\Delta f(z) \approx -\frac{f_0}{L_0} z$$

в диапазоне измеряемых микроперемещений $-0,4\lambda_0 \leq z \leq 0,4\lambda$. Диапазон измерения определяется обеспечением устойчивого одномодового режима работы перестраиваемого ПАВ–АГ [5].

Для измерения угловых микроперемещений применяются кольцевые ПАВ–волноводы 1 (рис. 8) с радиусом $R=15$ мм на основе пьезоэлектрической пленки окиси цинка толщиной $h=1,45$ мкм и шириной $d=200$ мкм.

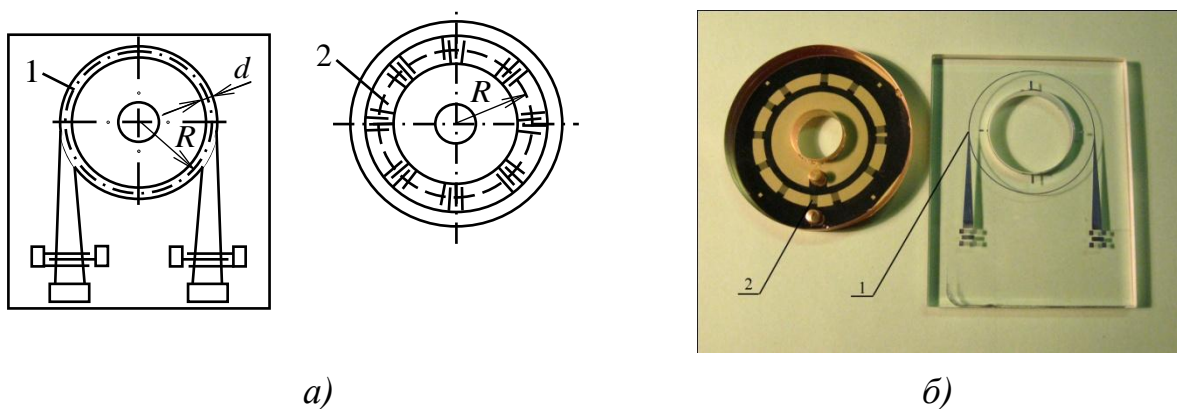


Рис. 8. Эскиз (а) и конструкция (б) ИП УП с подвижным приёмником ПАВ: 1 – ПАВ волновод – звукопровод ПАВ; 2 – подвижный приёмник

Приемник ПАВ 2 выполняется с радиальными встречно–штыревыми электродами.

Изготовленные макеты ИП ЛМП на звукопроводах из ниобата лития YZ–среза и структуры плавный кварц–пьезоэлектрическая пленка окиси цинка обеспечивают разрешающую способность 0,005...0,01 мкм в диапазоне микроперемещений ± 25 мкм. Разрешающая способность макетов ИП УМП составляет 0,1...0,3 угл. сек.

Выводы

На основе высокостабильного перестраиваемого ПАВ–автогенератора разработаны и экспериментально исследованы микроэлектронные высокочувствительные ИП различных механических величин с частотным выходным сигналом.

Изготовленные на серийном предприятии опытные партии автогенераторных ИП ЛУ типа 2SA и ИПД типа 2SP обладают высокими

метрологическими характеристиками, что подтверждает возможность создания серийных ИП различных МВ на ПАВ–АГ.

Автогенераторные ИП ЛМП и ИП УМП с подвижным приёмником ПАВ и на основе зондовой чувствительности ПАВ целесообразно использовать в качестве вторичных преобразователей высокочувствительных ИП различных МВ прямого и компенсационного принципа действия с металлическими ЧЭ.

Список использованной литературы

1. Жовнір Н.Ф., Черняк Н.Г., Дидковський А.А. Измерительные преобразователи физических величин на ПАВ // Электроника и связь. – 2003. – № 18. – С. 2 – 27.
2. Павловский М.А., Лопушенко В.К., Черняк Н.Г., Кондратенко Н.Г. Деформационные, температурные и гироскопические эффекты в автогенераторах на поверхностных акустических волнах // Механика гироскопических систем. – 1989. – Вып. 9. – С. 50 – 56.
3. Zbrutsky A., Chernyak N., Skripkovsky G. Creation of low cost linear accelerometers for navigation and control systems // Symposium Gyro Technology.–Stuttgart, Germany,2005.– P. 4.1 – 4.11
4. Лепих Я.И., Лопушенко В.К., Черняк Н.Г., Николаенко Ю.Е. Особенности разработки датчиков давления на ПАВ для АЭС // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2002. – № 2. – С. 58 – 63.
5. Жовнір М.Ф., Черняк М.Г., Дідківський А.А., Наушенко С.С. Фізико–технічні основи побудови вимірювального перетворювача мікропереміщень на поверхневих акустичних хвилях // Электроника и связь. – 2004. – № 23. – С. 5 – 28.
6. Жовнір М.Ф., Черняк М.Г., Дідківський А.А., Наушенко С.С. Пристрій на поверхневих акустичних хвилях для вимірювання тиску. Деклараційний патент України на винахід №71213А. – Опубл. 15.11.2004. – Бюл. №11.

Л. М. Рижков, Д. І. Степуренко

ВПЛИВ ПОХИБОК ПОБУДОВИ ОПОРНОГО ВЕКТОРА НА ТОЧНІСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ КУТІВ ОРІЄНТАЦІЇ ЗА АЛГОРИТМОМ TRIAD

Вступ

Серед детермінованих алгоритмів найпростішим та найшвидшим є алгоритм TRIAD (Three axis attitude determination). І хоча він є першим розробленим алгоритмом для визначення орієнтації, він продовжує бути об'єктом досліджень. Зокрема, в статтях [1, 2] проведений статистичний аналіз даного алгоритму. Робота [3] присвячена дослідженню різноманітних варіантів базового алгоритму.

Знаходження похибок визначення орієнтації за даним алгоритмом для загального випадку, коли кути орієнтації не можна вважати малими, є складною задачею. Однак, для випадку малих кутів можна отримати відносно прості аналітичні вирази для цих похибок.

Постановка задачі

Розглядається просторовий рух твердого тіла, з яким зв'яжемо систему координат (СК) $OXYZ$, відносно опорної СК $OX_0Y_0Z_0$. Для визначення кутів орієнтації будемо використовувати алгоритм TRIAD, згідно якому використовується інформація про два опорні напрямки. Позначимо одиничні вектори цих напрямків в опорній СК як \vec{a}_0 та \vec{b}_0 , а в зв'язаній СК – як \vec{a} та \vec{b} . Вважаємо відомими проекції цих векторів в опорній та зв'язаній системах координат. Алгоритм полягає в побудові двох трійок ортогональних одиничних векторів на основі інформації про опорні вектори в опорній та зв'язаній системах координат. Припускається, що один з векторів визначається з більшою точністю, ніж інший. Будемо вважати, що більш точно визначається вектор \vec{a} , а вектор \vec{b} визначається з деякою похибкою $\Delta\vec{b}$. Розглянемо вплив похибки $\Delta\vec{b}$ на точність визначення кутів орієнтації.

Аналіз похибок алгоритму TRIAD

За алгоритмом TRIAD трійки векторів будуються наступним чином:

$$\vec{a}_0, \vec{m}_0 = \frac{\vec{a}_0 \times \vec{b}_0}{|\vec{a}_0 \times \vec{b}_0|}, \vec{n}_0 = \vec{a}_0 \times \vec{m}_0; \quad (1)$$

$$\vec{a}, \vec{m} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}, \vec{n} = \vec{a} \times \vec{m}. \quad (2)$$

Матриця напрямних косинусів (МНК) переходу від системи координат $OX_0Y_0Z_0$ до системи координат $OXYZ$ має вигляд

$$H = M \cdot M_0^T, \quad (3)$$

де

$$M = \begin{bmatrix} a_x & m_x & n_x \\ a_y & m_y & n_y \\ a_z & m_z & n_z \end{bmatrix}, M_0 = \begin{bmatrix} a_{x0} & e_{y0} & e_{z0} \\ a_{x0} & m_{y0} & m_{z0} \\ a_{x0} & n_{y0} & n_{z0} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Запишемо матрицю H в розгорнутому вигляді:

$$H = \begin{bmatrix} a_x a_{x0} + m_x m_{x0} + n_x n_{x0} & a_x a_{y0} + m_x m_{y0} + n_x n_{y0} & a_x a_{z0} + m_x m_{z0} + n_x n_{z0} \\ a_y a_{x0} + m_y m_{x0} + n_y n_{x0} & a_y a_{y0} + m_y m_{y0} + n_y n_{y0} & a_y a_{z0} + m_y m_{z0} + n_y n_{z0} \\ a_z a_{x0} + m_z m_{x0} + n_z n_{x0} & a_z a_{y0} + m_z m_{y0} + n_z n_{y0} & a_z a_{z0} + m_z m_{z0} + n_z n_{z0} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Слід зауважити, що за даним алгоритмом визначається саме матриця напрямних косинусів, а кути орієнтації визначаються виходячи з послідовності поворотів. Прийнемо послідовність поворотів так, як в [4]. В цьому випадку кути поворотів визначаються таким чином:

$$\varphi = \arctg \frac{H_{2,3}}{H_{3,3}}; \vartheta = \arcsin(-H_{1,3}); \psi = \arctg \frac{H_{1,2}}{H_{1,1}}. \quad (6)$$

Спочатку з'ясуємо причину виникнення похибок алгоритму TRIAD.

Положення векторів у зв'язаній СК визначається за допомогою певних вимірювачів у залежності від фізичної природи опорних напрямків. Припустимо, що похибка $\Delta \vec{b}$ визначення вектора \vec{b} викликана похибками вимірювача відповідного напрямку, тобто є інструментальною.

Позначимо площину, в якій знаходяться вектори \vec{a} і \vec{b} , як Π (рис. 1). Похибка $\Delta \vec{b}$ може викликати наступні зміни вектора \vec{b} : 1) зміна довжини вектора; 2) поворот вектора в площині Π ; 3) поворот вектора в площині, яка перпендикулярна до площини базових векторів \vec{a} та \vec{b} . Як видно з рис. 1, поворот вектора \vec{b} в площині Π , а також зміна його довжини не викликають зміни векторів \vec{m} та \vec{n} . Тільки відхилення вектора

\vec{b} від площини Π викликає зміну вказаних векторів. Це, в свою чергу призводить до зміни значень кутів орієнтації, які обчислюються за алгоритмом, тобто це призводить до появи похибок визначення кутів.

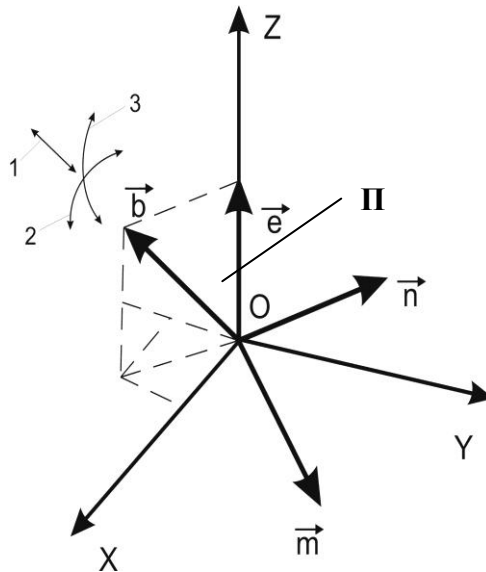


Рис. 1. Можливі зміни вектора \vec{b} : 1 – зміна довжини; 2 – поворот в площині Π ; 3 – відхилення від площини Π

Відхилення вектора \vec{b} від площини Π викликає тільки така похибка $\Delta\vec{b}$, яка перпендикулярна цій площині. У випадку, коли $\Delta\vec{b}$ має довільний напрям на точність визначення кутів орієнтації впливає тільки та її складова, яка перпендикулярна площині векторів \vec{a} і \vec{b} . Позначимо через \vec{N} орт нормалі до площини Π . Проекцію вектора $\Delta\vec{b}$ на напрям нормалі позначимо як K , а вектор, якій відповідає цій проекції як \vec{K} . Найбільший вплив похибка $\Delta\vec{b}$ буде мати тоді, коли вона буде збігатися з напрямком вектора \vec{N} . Таким чином, проекція K є мірою впливу похибок визначення вектора \vec{b} на точність визначення кутів орієнтації.

Знайдемо вирази для похибок визначення кутів. У випадку, коли кути орієнтації є малими, вирази для їх визначення спрощуються ($H_{1,1} \approx 1$, $H_{3,3} \approx 1$) і набувають наступного вигляду:

$$\psi \approx H_{1,2}, \quad \vartheta \approx -H_{1,3}, \quad \varphi \approx H_{2,3}. \quad (7)$$

Використовуючи вираз для матриці направляючих косинусів H (5), можна записати:

$$\begin{aligned} \psi &\approx a_x a_{y0} + m_x m_{y0} + n_x n_{y0}, \\ \vartheta &\approx -(a_x a_{z0} + m_x m_{z0} + n_x n_{z0}), \\ \varphi &\approx a_y a_{z0} + m_y m_{z0} + n_y n_{z0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Г і р о с к о п і ч н і с и с т е м и

Надаючи проекціям векторів \vec{m} та \vec{n} прирости, що викликані похибкою $\Delta\vec{b}$, отримаємо відповідні прирости кутів, які і будуть похибками визначення цих кутів:

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= m_{y0}\Delta m_x + n_{y0}\Delta n_x, \\ \Delta\vartheta &= -(m_{z0}\Delta m_x + n_{z0}\Delta n_x), \\ \Delta\varphi &= m_{z0}\Delta m_y + n_{z0}\Delta n_y.\end{aligned}\tag{9}$$

Запишемо похибки побудови опорних векторів \vec{m} та \vec{n} . Зірочкою тут і надалі будемо позначати збурені значення кутів та векторів. Маємо:

$$\vec{m}^* = \frac{\vec{a} \times \vec{b}^*}{|\vec{a} \times \vec{b}^*|} = \frac{\vec{a} \times (\vec{b} + K(\vec{a} \times \vec{b}))}{|\vec{a} \times \vec{b}^*|} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}^*|} + K \frac{\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}^*|} = \vec{m} + \Delta\vec{m},\tag{10}$$

де $\Delta\vec{m} = K \frac{\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}^*|} = K\vec{a} \times \vec{m} = K\vec{n}$;

$$\begin{aligned}\vec{n}^* &= \vec{a} \times \vec{m}^* = \vec{a} \times (\vec{m} + \Delta\vec{m}) = \vec{a} \times \vec{m} + \vec{a} \times \Delta\vec{m} = \vec{n} + \Delta\vec{n}; \\ \Delta\vec{n} &= \vec{a} \times \Delta\vec{m} = K\vec{a} \times \vec{n} = -K\vec{m}.\end{aligned}$$

Підставивши вирази для похибок $\Delta\vec{m}$ та $\Delta\vec{n}$ в формули (9), отримаємо наступні вирази для похибок визначення кутів орієнтації:

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= m_{y0}Kn_x - n_{y0}Km_x = K(m_{y0}n_x - n_{y0}m_x) \\ \Delta\vartheta &= -m_{z0}Kn_x + n_{z0}Km_x = K(n_{z0}m_x - m_{z0}n_x), \\ \Delta\varphi &= m_{z0}Kn_y - n_{z0}Km_y = K(m_{z0}n_y - n_{z0}m_y).\end{aligned}\tag{11}$$

Розглянемо програмний рух твердого тіла. При цьому кути орієнтації будемо змінювати таким чином: $\psi(t) = 10^\circ \sin(0.03t)$, $\vartheta = \varphi = 0$. Вектори \vec{a}_0 і \vec{b}_0 розташуємо в площині Y_0OZ_0 . Для перевірки отриманих за формулами (11) результатів порівняємо їх з різницею між значеннями кутів, які отримані при наявності та при відсутності похибки $\Delta\vec{b}$. Введемо наступні величини: $\Delta\psi_c = \psi^* - \psi$, $\Delta\vartheta_c = \vartheta^* - \vartheta$ і $\Delta\varphi_c = \varphi^* - \varphi$, де величини із зірочкою позначають кути, що обчислені при наявності похибки $\Delta\vec{b}$, а індекс «с» позначає обчислені значення похибок (на відміну від розрахованих).

Розглянемо випадок, коли вектор $\Delta\vec{b}$ напрямлений вздовж осі OX зв'язаної системи координат: $\Delta\vec{b} = [0.05, 0, 0]^T$. Результати моделювання для цього випадку наведені на рис. 2. Похибки за кутами ψ і ϑ в початковий момент часу є максимальними. Це пояснюється тим, що в цей момент вектор $\Delta\vec{b}$ перпендикулярний до площини Π і, відповідно, максимальною є величина K . Похибки за вказаними кутами є

мінімальними, коли відхилення за кутом ризання досягає найбільшого значення. В цей час величина K є мінімальною. Бачимо, що відносна похибка побудови вектора $\Delta \vec{b} = 5\%$ спричиняє досить суттєві помилки обчислення кутів орієнтації. З цього ж рисунку можна зробити висновок, що для малих кутів Ейлера запропоновані аналітичні залежності дають можливість досить точно оцінити похибки визначення цих кутів.

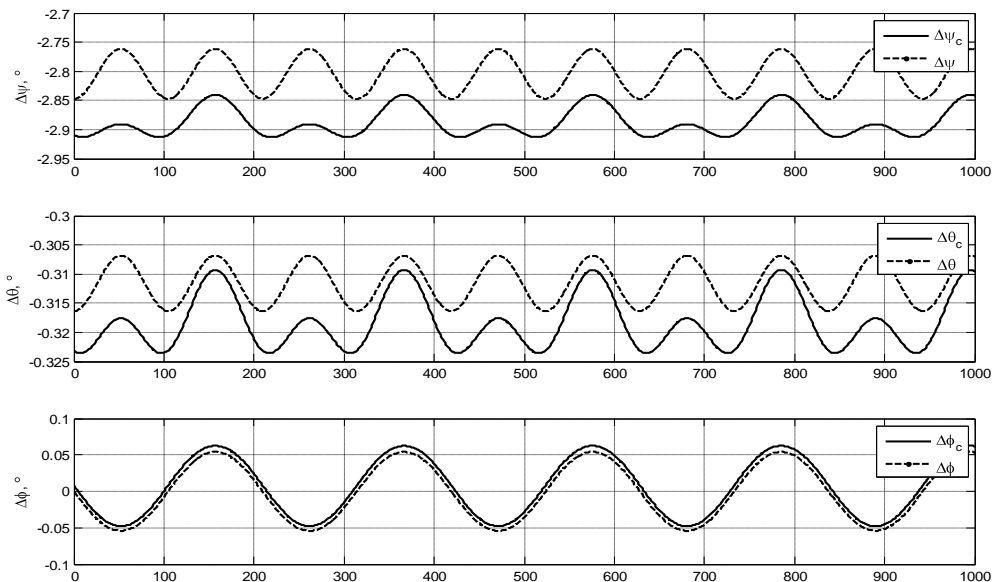


Рис. 2. Зміна похибок визначення кутів орієнтації при умові, що вектор $\vec{\Delta b}$ напрямлений вздовж осі OX зв'язаної системи координат

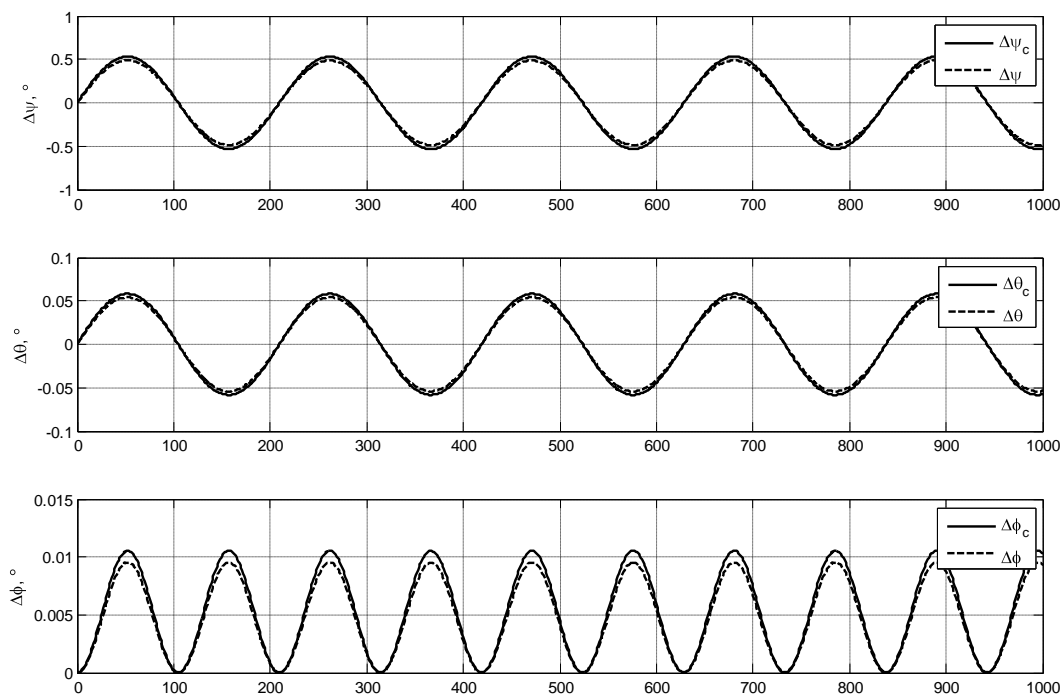


Рис. 3. Зміна похибок визначення кутів орієнтації при умові, що вектор $\vec{\Delta b}$ напрямлений вздовж осі OY зв'язаної системи координат

Розглянемо випадок, коли вектор $\vec{\Delta b}$ напрямлений вздовж осі OY зв'язаної системи координат: $\vec{\Delta b} = [0, 0.05, 0]^T$. Результати моделювання для цього випадку наведені на рис. 3. Похибки за всіма трьома кутами в початковий момент часу дорівнюють нулю, оскільки вектор $\vec{\Delta b}$ знаходиться в площині Π ; величина K при цьому дорівнює нулю. При відхиленні зв'язаної СК від нульового положення з'являється відмінна від нуля проекція K . Вона і спричиняє появу похибок визначення кутів.

Порівняльний аналіз графіків, наведених на рис. 2 та рис. 3, підтверджує отриманий висновок, що на точність визначення кутів найбільше впливає відхилення опорного вектора в площині, перпендикулярній до площини, в якій знаходяться опорні вектори. Зауважимо, що навіть, коли зв'язана СК здійснює складний коливальний рух за всіма трьома кутами, якісно зміна похибок не відрізняється від наведених на рис. 2 та рис. 3. При цьому в залежності від початкових кутів та частот коливань форма графіків подібна до однієї з двох наведених.

Висновки

Проведений геометричний аналіз виникнення похибок обчислення кутів орієнтації за алгоритмом TRIAD показав, що ці похибки викликаються тією складовою похибки одного з базових векторів, яка перпендикулярна до площини базових векторів. Отримано аналітичні вирази, які дозволяють визначити похибки обчислення кутів орієнтації за вказаним алгоритмом при умові, що кути є малими. Доцільним напрямом подальших досліджень є отримання аналогічних співвідношень без обмежень на величини кутів орієнтації.

Список використаної літератури

1. *Shuster M.D.* The TRIAD algorithm as maximum likelihood estimation// The Journal of the Astronautical Sciences, Vol.54, No. 1, January-March 2006, pp.113-123.
2. *Shuster M.D.* Deterministic three-axis attitude determination// The Journal of the Astronautical Sciences, Vol.52, No. 3, July-September 2004, pp.405-419.
3. *Tanygin S., Shuster M.D.* The many TRIAD algorithms. Paper AAS-07-104, AAS/AIAA 17th Space Flight Mechanics Meeting, Sedona, Arizona, January 28 – February 2, 2007, 19pp.; Proceedings: Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 127, 2007, pp.81-99.
4. *Рижков Л.М, Мелащенко О.М, Степуренко Д.І., Шилко І.С.* Вплив похибок вимірювачів на точність двовекторних систем орієнтації//VII міжнародна науково-технічна конференція “Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки”, ч.2, Київ, 2009, с.302-307.

V. A. Apostolyuk, A. S. Apostolyuk

TRANSIENT PROCESS ANALYSIS OF CORIOLIS VIBRATORY GYROSCOPES

Introduction

Coriolis vibratory gyroscopes (CVGs) received significant amount of interest from the both scientific and engineering communities due to the possibility to fabricate sensitive elements of such gyroscopes in miniature form by using modern microelectronic mass-production technologies. Such gyroscopes are frequently referred to as MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems) gyroscopes. Being based on sensing of Coriolis acceleration due to the rotation in oscillating structures, CVGs have a lot more complicated mathematical models, comparing to the conventional types of gyroscopes. One of such complication is a result of the useful signal proportional to the external angular rate being modulated with the intentionally excited primary oscillations [1-3]. From the mathematical modelling point of view, this leads to necessity to “demodulate” the solution in terms of the sensitive element displacements to obtain practically feasible insights into CVG dynamics and errors. From the control systems point of view, conventional representation of CVGs incorporates primary oscillation excitation signal as an input to the dynamic system, and unknown angular rate as a coefficients of its transfer functions [3]. As a result, dynamics of CVGs has been analysed mainly in steady state, while transient process analysis has been omitted due to its apparent complexity.

This paper describes new method of CVG dynamics analysis by means of complex amplitude-phase variables, which enables having angular rate as an input to the dynamic system, and conducting proper transient process analysis without any additional demodulation.

Problem formulation

In the most generalized form, motion equations of the CVG sensitive element both with translational and rotational motion could be represented in the following form [4]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1 k_1 \dot{x}_1 + (k_1^2 - d_1 \Omega^2)x_1 + g_1 \Omega \dot{x}_2 + d_3 \dot{\Omega} x_2 = q_1 t , \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2 k_2 \dot{x}_2 + (k_2^2 - d_2 \Omega^2)x_2 - g_2 \Omega \dot{x}_1 - \dot{\Omega} x_1 = q_2 t . \end{cases} \quad (1)$$

Here x_1 and x_2 are the generalized coordinates that describe primary (excited) and secondary (sensed) motions of the sensitive element respectively,

k_1 and k_2 are the corresponding natural frequencies, ζ_1 and ζ_2 are the dimensionless relative damping coefficients, Ω is the measured angular rate, which is orthogonal to the axes of primary and secondary motions, q_1 and q_2 are the generalized accelerations due to the external forces acting on the sensitive element. The remaining dimensionless coefficients are different for the sensitive elements exploiting either translational or rotational motion. For the translational sensitive element they are $d_1 = d_2 = 1$, $d_3 = m_2 / (m_1 + m_2)$, $g_1 = 2m_2 / (m_1 + m_2)$, $g_2 = 2$, where m_1 and m_2 are the masses of the outer frame and the internal massive element. In case of the rotational motion of the sensitive element, these coefficients are the functions of different moments of inertia (for greater details see [4]).

In the presented above motion equations, the angular rate is included as an unknown and variable coefficient rather than an input to the double oscillator system. In order to identify the angular rate one must detect secondary oscillations of the sensitive element and measure its amplitude, which is approximately directly proportional to the angular rate, and phase, which gives the sign.

In order to make the equations (1) suitable for to the transient process analysis we must make the following assumptions: angular rate is small comparing to the primary and secondary natural frequencies so that

$$k_1^2 \gg d_1 \Omega^2, k_2^2 \gg d_2 \Omega^2 \quad (2)$$

and rotational and Coriolis accelerations acting along primary oscillation axis are negligible in comparison to the accelerations from driving forces

$$g_1 \Omega \dot{x}_2 + d_3 \dot{\Omega} x_2 \ll q_1 t \quad (3)$$

Taking into considerations assumptions (2) and (3), motions equations (1) could be simplified to the following form:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1 k_1 \dot{x}_1 + k_1^2 x_1 = q_1 t, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2 k_2 \dot{x}_2 + k_2^2 x_2 = g_2 \Omega \dot{x}_1 + \dot{\Omega} x_1. \end{cases} \quad (4)$$

Here we also assumed that no external driving forces are affecting the secondary oscillations, which means that $q_2 t = 0$. System of equations (4) is now perfectly suitable for further transformations towards the desired representation in terms of the unknown angular rate.

Amplitude-phase motion equations

As has been shown in [5], by means of a proper chosen phase shift of the excitation voltage applied to the sensitive element, the excitation force could be shaped to the perfect harmonic form. Using exponential representation of complex numbers, such a driving force $q_1 t$ could be represented as

$$q_1 t = q_{10} \sin(\omega t) = \text{Im}\{q_{10} e^{j\omega t}\}. \quad (5)$$

Here ω is the excitation frequency given in radians per second, q_{10} is the constant excitation acceleration amplitude. Non-homogeneous solutions of the motion equations (1) or (4) for primary and secondary oscillations are searched in a similar form

$$\begin{aligned} x_1 t &= \text{Im}\{A_1(t)e^{j\omega t}\}, & A_1 t &= A_{10}(t)e^{j\phi_{10}(t)}, \\ x_2 t &= \text{Im}\{A_2(t)e^{j\omega t}\}, & A_2 t &= A_{20}(t)e^{j\phi_{20}(t)}, \end{aligned} \quad (6)$$

where A_{10} and A_{20} are the primary and secondary oscillation amplitudes, ϕ_{10} and ϕ_{20} are the corresponding phase shifts relatively to the excitation force. Although these quantities are real (non-imaginary), they are combined in complex amplitude-phase variables A_1 and A_2 .

Substituting expressions (5) and (6) into equations (4) results in the following motions equations in terms of the complex amplitude-phase variables rather than real generalized coordinates:

$$\begin{cases} \ddot{A}_1 + 2(\zeta_1 k_1 + j\omega)\dot{A}_1 + (k_1^2 - \omega^2 + 2j\omega k_1 \zeta_1)A_1 = q_{10}, \\ \ddot{A}_2 + 2(\zeta_2 k_2 + j\omega)\dot{A}_2 + (k_2^2 - \omega^2 + 2j\omega k_2 \zeta_2)A_2 = (j\omega g_2 \Omega + \dot{\Omega})A_1 + g_2 \dot{A}_1 \Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Equations (7) describe variations of the amplitude and phase of the primary and secondary equations in time with respect to the unknown non-constant angular rate $\Omega(t)$. This allows conducting analysis of the Coriolis vibratory gyroscope dynamics without constraining the angular rate to be constant or slowly varying.

Analysing system (7), one can see that the first equation can be solved separately from the second one. After homogeneous solutions of the first equation faded out, only non-homogenous solution remains. In this case, amplitude of the primary oscillations is

$$A_1 = \frac{q_{10}}{k_1^2 - \omega^2 + 2jk_1 \zeta_1 \omega}, \quad (8)$$

and it is constant in time, yielding $\ddot{A}_1 = \dot{A}_1 = 0$. Indeed, most of the time measurements of the angular rate are performed when primary oscillations have already settled. As a result, only equation for the secondary oscillations remains,

in which the complex primary amplitude A_1 is just a constant parameter given by (8):

$$\ddot{A}_2 + 2(\zeta_2 k_2 + j\omega)\dot{A}_2 + (k_2^2 - \omega^2 + 2j\omega k_2 \zeta_2)A_2 = (j\omega g_2 \Omega + \dot{\Omega})A_1. \quad (9)$$

Equation (7) now describes amplitude-phase of the secondary oscillations with respect to the settled primary oscillations.

System transfer functions

Having CVG sensitive element motion equation in the form (9), allows analysis of its transient processes in amplitudes and phases with respect to arbitrary angular rates applied to the system. Application of the Laplace transformation to the equations (7) with respect to zero initial conditions for all time-dependent variables results in the following expressions:

$$[(s + j\omega)^2 + 2\zeta_2 k_2 (s + j\omega) + k_2^2]A_2(s) = A_1[s + jg_2\omega]\Omega(s). \quad (10)$$

Solution of the algebraic equation (10) for the secondary amplitude-phase Laplace transform is

$$A_2(s) = \frac{A_1(s + jg_2\omega)}{(s + j\omega)^2 + 2\zeta_2 k_2 (s + j\omega) + k_2^2} \Omega(s). \quad (11)$$

Considering the angular rate as an input, the system transfer function for the secondary amplitude-phase is

$$\begin{aligned} W_2(s) &= \frac{A_2(s)}{\Omega(s)} = \frac{A_1(s + jg_2\omega)}{(s + j\omega)^2 + 2\zeta_2 k_2 (s + j\omega) + k_2^2} = \\ &= \frac{q_{10}(s + jg_2\omega)}{[(s + j\omega)^2 + 2\zeta_2 k_2 (s + j\omega) + k_2^2][k_1^2 - \omega^2 + 2j\omega k_1 \zeta_1]}. \end{aligned} \quad (12)$$

One should note that transfer function (12) has complex coefficients, which results in the complex system outputs as well. Although it is somewhat unusual, it still enables us to analyse CVG dynamics and transient processes due to the angular rate in an open-loop dynamic system.

Amplitude and phase responses

In order to calculate the amplitude response of the system using transfer function (12), Laplace variable s must be replaced with the Fourier variable $j\lambda$, where λ is the frequency of the angular rate oscillations:

$$W_2(j\lambda) = \frac{jq_{10}(\lambda + g_2\omega)}{[k_2^2 - (\lambda + \omega)^2 + 2j\zeta_2 k_2 (\lambda + \omega)][k_1^2 - \omega^2 + 2j\omega \zeta_1 k_1]}. \quad (13)$$

Absolute value of the complex function (13) is the amplitude response of the secondary oscillations amplitude to the harmonic angular rate, and the corresponding phase of the complex function is the phase response:

$$A(\lambda) = \frac{q_{10}(\lambda + g_2\omega)}{\sqrt{[(k_2^2 - (\lambda + \omega)^2)^2 + 4\zeta_2^2 k_2^2 (\lambda + \omega)^2][(k_1^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_1^2 k_1^2 \omega^2]}}$$

$$\phi(\lambda) = \tan^{-1} \left\{ \frac{[k_2^2 - (\lambda + \omega)^2][k_1^2 - \omega^2] - 4k_1 k_2 \zeta_1 \zeta_2 \omega (\lambda + \omega)}{2[k_2 \zeta_2 (\lambda + \omega)(k_1^2 - \omega^2) + k_1 \zeta_1 \omega (k_2^2 - (\lambda + \omega)^2)]} \right\}. \quad (14)$$

One should note that, assuming constant angular rate ($\lambda = 0$) in the expressions (12) the well known expressions ([5]) for the amplitude and phase of the secondary oscillations is obtained.

Analysis of the expressions (12) shows that effect from the oscillating angular rate is practically equivalent to shift of the excitation frequency by the frequency of the angular rate. This causes CVGs, especially those with high Q-factor, to loose its resonant tuning, which in turn results in significant variation of its scale factor (dynamic error). Solution of this problem by means of proper choice of natural frequency split and damping has been suggested in [6].

Stability and transient process optimisation

Both stability and unit-step transient process quality depend on position of the system poles in the real-imaginary plane. Poles of the transfer function (12) are as follows:

$$s_{1,2} = -k_2 \zeta_2 \pm j k_2 \sqrt{1 - \zeta_2^2} - j\omega, \quad (15)$$

Analysing expressions (15), it is easy to see that CVGs are inherently stable. Indeed, if the relative damping coefficient $\zeta_2 \leq 1$, then real parts of the poles are $-k_2 \zeta_2 < 0$. If the relative damping coefficient $\zeta_2 > 1$, then real parts are $-k_2(\zeta_2 \pm \sqrt{\zeta_2^2 - 1}) < 0$.

Ideal (half-oscillatory) unit-step angular rate transient process in secondary oscillations amplitude is achievable if imaginary parts of the poles (15) are zero. One pole has large imaginary part $-k_2 \sqrt{1 - \zeta_2^2} - \omega < 0$, which is always way below zero, and corresponds to high frequency oscillations in the envelope. The second pole is responsible for the low frequency oscillations, and is the most essential for the transient process. For this pole the ideal transient process condition has the following form:

$$k_2 \sqrt{1 - \zeta_2^2} - \omega = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \zeta_2^2}}.$$

For example, if primary oscillations are excited in pure resonance for better sensitivity (see [5]), equation is transformed to

$$k_2 = k_1 \sqrt{\frac{1 - 2\zeta_1^2}{1 - \zeta_2^2}}. \quad (16)$$

As a result, in order to provide ideal transient process for the secondary oscillations amplitude, one should design sensitive element of CVG with the natural frequency of the secondary oscillations according to (16).

Another important performance feature of a system transient process is its settling time, which is defined by the real part of the system poles and can be approximated as

$$T = -\frac{\ln(\varepsilon)}{k_2 \zeta_2}.$$

Here ε is the error tolerance ($\varepsilon=0.01$ for 1% tolerance). From this dependence one can see, that in order to minimize settling time, denominator $k_2 \zeta_2$ must be maximised. Since sensitivity of CVG is inversely related to its natural frequencies (see [5]), reducing its damping along with the natural frequencies will increase its transient process settling time.

Case of slowly varying amplitude

Another consequence of the presented above analysis of the system poles and its transient process is that actual amplitude of the secondary oscillations is mainly defined by the low frequency pole, while effect from the high frequency pole can be neglected, since it will be removed during demodulation process. In other words, predominant behaviour is a slow variation of the amplitude and phase. Neglecting the second order derivative in the equation (9) yields

$$2(\zeta_2 k_2 + j\omega)\dot{A}_2 + (k_2^2 - \omega^2 + 2j\omega k_2 \zeta_2)A_2 = (j\omega g_2 \Omega + \dot{\Omega})A_1, \quad (17)$$

and the corresponding angular rate transfer function becomes

$$W_2(s) = \frac{q_{10}(s + jg_2\omega)}{[2\zeta_2 k_2 s + k_2^2 - \omega^2 + j2\omega(\zeta_2 k_2 + s)][k_1^2 - \omega^2 + 2j\omega k_1 \zeta_1]}. \quad (18)$$

Single pole of this transfer function is

$$s_1 = -\frac{k_2^2 - \omega^2 + 2j\omega \zeta_2 k_2}{2(\zeta_2 k_2 + j\omega)} = -k_2 \zeta_2 \frac{k_2^2 + \omega^2}{2(\zeta_2^2 k_2^2 + \omega^2)} + j \frac{k_2^2 \omega - 2k_2^2 \zeta_2^2 \omega - \omega^3}{2(\zeta_2^2 k_2^2 + \omega^2)}. \quad (19)$$

Ideal unit-step transient process achieved when imaginary part of the (19) equals to zero, which in turn gives

$$\omega = k_2 \sqrt{1 - 2\zeta_2^2}, \quad (20)$$

which is the eigenfrequency of the secondary oscillations. However, as it has been mentioned earlier, better sensitivity is achieved when the sensitive element is driven in the primary resonance, which means $\omega = k_1\sqrt{1 - 2\zeta_1^2}$. In this case

$$k_2 = k_1 \sqrt{\frac{1 - 2\zeta_1^2}{1 - 2\zeta_2^2}}. \quad (21)$$

Although this formula is somewhat different from the obtained earlier dependence (16), actual values are quite close. If the secondary natural frequency is chosen accordingly to (21) then pole (19) becomes

$$s_1 = -k_1\zeta_2 \sqrt{\frac{1 - 2\zeta_1^2}{1 - 2\zeta_2^2}} = -k_2\zeta_2. \quad (22)$$

Obviously, unit-step settling time is still given by the expression (16), and all the hints to the settling time minimization remain the same.

Real and imaginary transfer functions

While simulating dynamics of CVG based on the complex amplitude-phase transfer functions (12) or (18) one could have problems dealing with complex coefficients of these transfer functions. One way to avoid this problem is to consider real and imaginary parts of complex amplitude as separate signals, which are then combined together to produce real amplitude and phase. In order to obtain transfer functions for such signals let us represent primary and secondary amplitudes as:

$$A_1 = A_{1R} + jA_{1I}, \quad A_2 = A_{2R} + jA_{2I}. \quad (23)$$

Primary oscillations components can be easily found by means of substituting expressions (23) into (8)

$$A_{1R} = \frac{q_{10}(k_1^2 - \omega^2)}{(k_1^2 - \omega^2)^2 + 4k_1^2\zeta_1^2\omega^2}, \quad A_{1I} = -\frac{2q_{10}j\omega k_1\zeta_1}{(k_1^2 - \omega^2)^2 + 4k_1^2\zeta_1^2\omega^2}. \quad (24)$$

At the same time, substituting expressions (23) into the motion equation (9), and applying Laplace transformation gives

$$\begin{cases} (k_2^2 - \omega^2 + 2k_2\zeta_2s + s^2)A_{2R} - 2\omega(k_2\zeta_2 + s)A_{2I} = (A_{1R}s - A_{1I}g_2\omega)\Omega, \\ (k_2^2 - \omega^2 + 2k_2\zeta_2s + s^2)A_{2I} + 2\omega(k_2\zeta_2 + s)A_{2R} = (A_{1I}s + A_{1R}g_2\omega)\Omega. \end{cases} \quad (25)$$

Resolving algebraic system (25) with respect to unknown real and imaginary parts of the secondary complex amplitude yields

$$A_{2R} = \frac{A_{1R}M_{RR}(s) + A_{1I}M_{RI}(s)}{P(s)}\Omega, \quad A_{2I} = \frac{A_{1R}M_{IR}(s) + A_{1I}M_{II}(s)}{P(s)}\Omega. \quad (26)$$

Here the numerator polynomials from the real and imaginary parts of primary amplitudes are given by the following expressions:

$$\begin{aligned}
 M_{RR}(s) &= s(k_2^2 + 2k_2\zeta_2s + s^2) - \omega^2(s - 2g_2(s + k_2\zeta_2)) \\
 M_{RI}(s) &= \omega[2s(s + k_2\zeta_2) - g_2(k_2^2 - \omega^2 + 2k_2\zeta_2s + s^2)], \\
 M_{II}(s) &= 2\omega^2g_2(s + k_2\zeta_2) + s(k_2^2 - \omega^2 + 2k_2\zeta_2s + s^2), \\
 M_{IR}(s) &= \omega[g_2(k_2^2 - \omega^2 + 2k_2\zeta_2s + s^2) - 2s(s + k_2\zeta_2)]. \\
 P(s) &= 4(s + k_2\zeta_2)^2\omega^2 + (k_2^2 - \omega^2 + 2k_2\zeta_2s + s^2)^2
 \end{aligned} \tag{27}$$

One should note that if primary oscillations are excited at the primary natural frequency ($\omega = k_1$), then

$$A_{1I} = -\frac{q_{10}}{2k_1^2\zeta_1}, \quad A_{1R} = 0, \tag{28}$$

and two out of the four transfer functions (27) become unnecessary.

Finally, there is quite an important case, when complex transfer functions transform to the simple real one. Assuming equal primary and secondary natural frequencies ($k_1 = k_2 = k$), damping ratios ($\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$), resonance excitation, and constant angular rate, one can easily obtain

$$A_{20}(s) = \sqrt{A_{2R}^2 + A_{2I}^2} = \frac{q_{10}g_2}{4k^2\zeta(s + k\zeta)}. \tag{29}$$

Although this case appears to be very specific, it still approximates transient process of a “tuned” CVG with accuracy suitable for most of the applications.

Numerical simulations

In order to obtain the most realistic transient process, a non-linear model of CVG has been implemented based on the equations (1) with neglected centrifugal accelerations according to (2) and added synchronous demodulator (see fig. 1). This model is used to verify output produced by the complex model based on the real and imaginary transfer functions (26) and (27) (shown in the fig. 2).

Simulation results for these two models are shown in the figures 3 and 4, where solid line corresponds to the complex model output, dotted line corresponds to the “realistic” reference output, and dashed line shows the input angular rate.

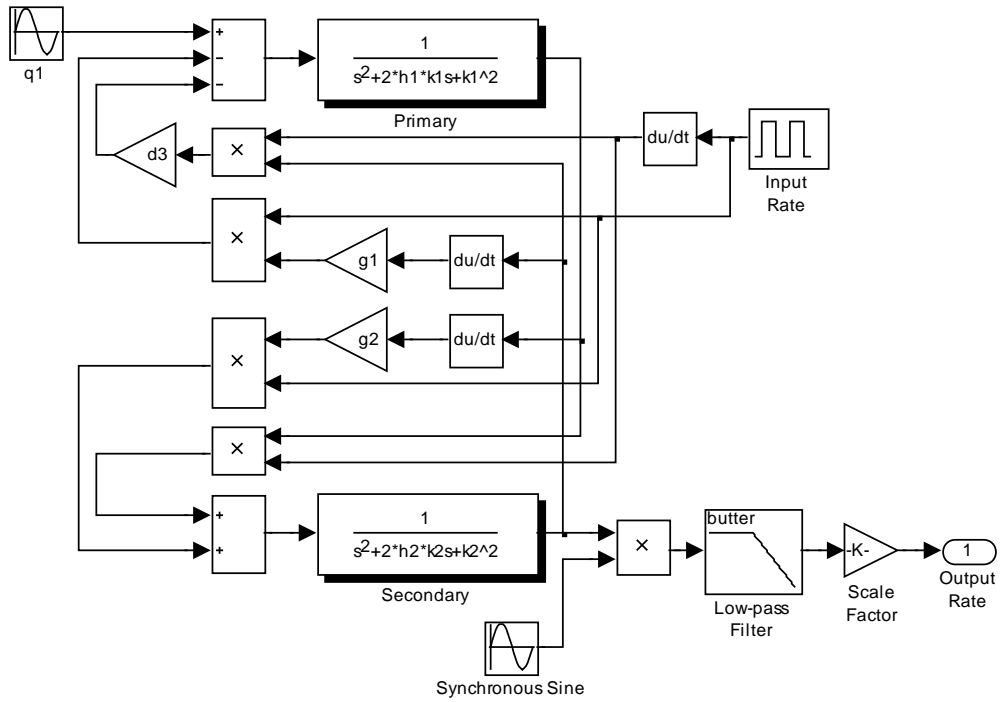


Fig. 1. Realistic CVG simulation model

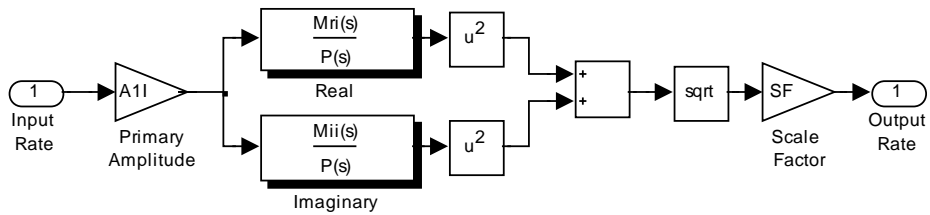


Fig. 2. Real and imaginary transfer functions model

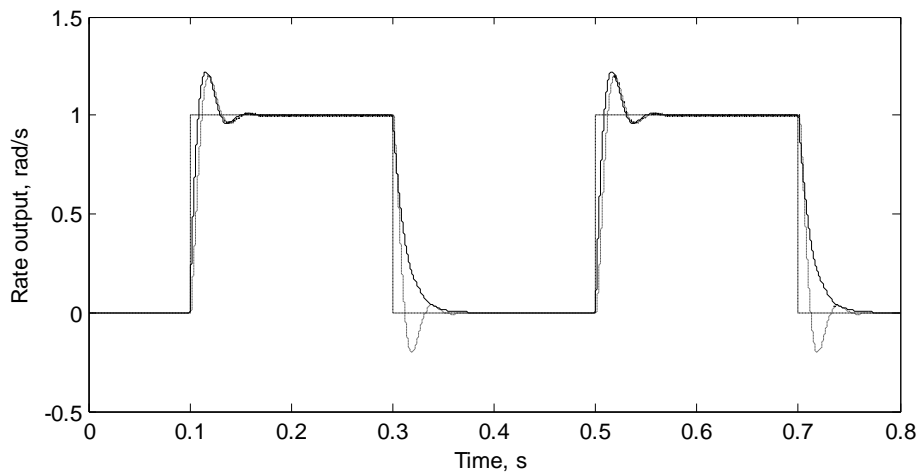


Fig. 3. Non-optimised transient process
 ($k_1 = 1000\pi$, $k_2 = 1.05k_1$, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.025$, $\omega = k_1$)

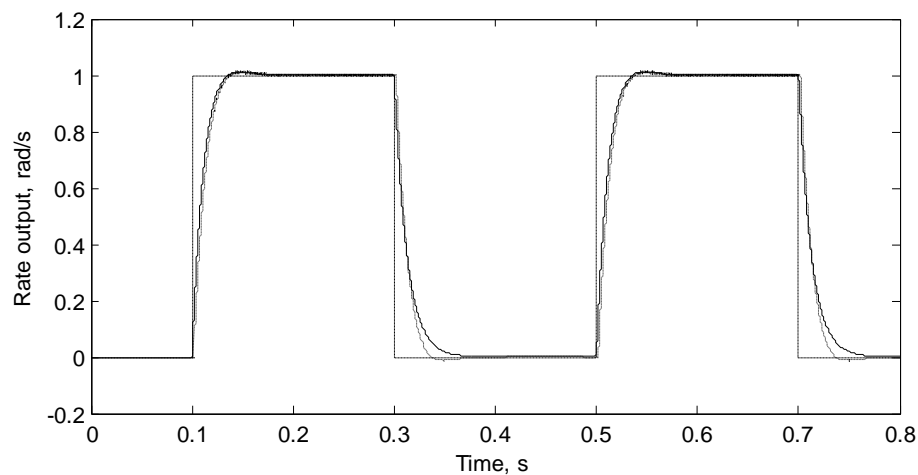


Fig. 4. Optimised transient process
 $(k_1 = 1000\pi, k_2 = 0.987k_1, \zeta_1 = \zeta_2 = 0.025, \omega = k_1)$

In the first case, transient process for the non-optimised CVG is shown, expressing significant overshoot and clear oscillatory behaviour. In the second case secondary natural frequency is chosen according to (16), which resulted in half-oscillation transient process as expected.

From the graphs in the figures 3 and 4, one can see that “realistic” transient process is somewhat different from the “complex” one. This is believed to be the result of demodulating with the fixed phase shifted signal, while the actual phase shift varies in time. At the same time, “complex” output is much closer to the real secondary oscillations envelope, than the demodulated “realistic”.

Conclusions

Presented above analysis of CVG dynamics using amplitude-phase complex variables resulted in obtaining system transfer functions, where measured angular rate became an input rather than a parameter. This made possible to analyse amplitude and phase responses of CVG and its transient processes in already demodulated signals. As a result, conditions of the optimal transient process have been obtained along with formula for its performances calculation. Excellent performances of the obtained transfer functions have been demonstrated using numerical simulations.

References

1. *Friedland B., Hutton M. F.* Theory and error analysis of vibrating-member gyroscope // *IEEE Transactions on Automatic Control*, no. 23, 1978, pp. 545-556.

2. Lynch D. Vibratory gyro analysis by the method of averaging // Proc. 2nd St. Petersburg Conf. on Gyroscopic Technology and Navigation, St. Petersburg, 1995, pp. 26-34.
3. Apostolyuk V., Tay F. Dynamics of Micromechanical Coriolis Vibratory Gyroscopes // Sensor Letters, Vol. 2, No 3-4, 2004, pp. 252-259.
4. Apostolyuk V. A., Logeeswaran V.J., Tay F.E.H. Efficient design of micromechanical gyroscopes // Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol. 12, 2002, pp. 948-954.
5. Apostolyuk V. A. Theory and Design of Micromechanical Vibratory Gyroscopes // MEMS/NEMS Handbook (Ed: Cornelius T. Leondes), Springer, 2006, Vol.1, Chapter 6, pp. 173-195.
6. Apostolyuk V.A. Dynamic Errors of Coriolis Vibratory Gyroscopes // Mechanics of Gyroscopic Systems, no. 19, 2008, pp. 230-239.

УДК 531/534

И. В. Балабанов, Т. В. Балабанова, В. И. Степин, А. П. Коррель

ЖЕСТКОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ УПРУГИХ ПОДВЕСОВ НАВИГАЦИОННЫХ ДАТЧИКОВ

Введение

Как известно [1], инерциальные датчики с упругими подвесами занимают доминирующее положение по сравнению с приборами других типов, имеющими аналогичные точностные характеристики. При этом точность этих датчиков существенно зависит от характеристик их упругих подвесов.

Постановка задачи

Основными факторами, влияющими на характеристики упругих подвесов, являются жесткостные характеристики упругих элементов, из которых состоят подвесы. Эти характеристики вместе со схемами относительного расположения элементов конструкции являются определяющими для характеристик упругих подвесов.

Причем, при получении упругих подвесов с требуемыми характеристиками или определении оптимальных параметров упругих подвесов, необходимо располагать аналитическими выражениями, описывающими жесткостные характеристики упругих элементов.

Таким образом, целью данной работы является получение аналитических формул, описывающих жесткостные характеристики типовых элементов упругих подвесов инерциальных датчиков.

Описание конструкций упругих подвесов инерциальных датчиков

Будем рассматривать три наиболее распространенных вида инерциальных датчиков, имеющих упругие подвесы. Это - микромеханические гироскопы (ММГ), низкочастотные линейные акселерометр (НЛА) и динамически настраиваемые гироскопы (ДНГ).

Проведем анализ конструкций упругих подвесов различных инерциальных датчиков.

Характерным представителем ММГ является двухмассовый камертонный ММГ (разработанный в «Draper Laboratory», США). Упругий подвес двухмассового камертонного ММГ (рис. 1) представляет собой конструкцию, состоящую из работающих на изгиб стержней.

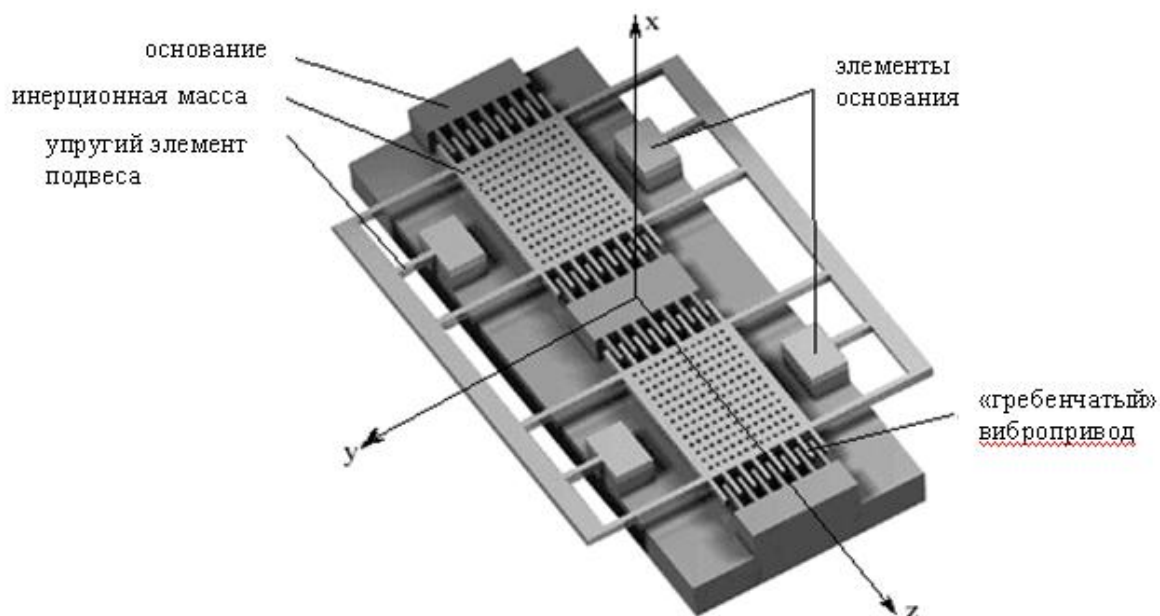


Рис. 1. Конструкция упругого подвеса двухмассового камертонного ММГ

Представителем НЛА может быть выбран, например, акселерометр типа ВТ (выпускаемый Черниговским заводом радиоприборов, Украина). Конструкция упругого подвеса НЛА типа ВТ (рис. 2) состоит из параллельно соединенных пластин постоянного сечения, работающих на изгиб.

Типичным представителем ДНГ, выпускаемых на территории СНГ, является ДНГ серии ГВК (разработчик Раменское ПКБ, Россия). В упругих подвесах ДНГ данной серии (рис. 3) основными элементами,

определяющими все наиболее важные их характеристики, являются пластины переменного поперечного сечения, образованного двумя цилиндрами



Рис. 2. Фрагмент конструкции упругого подвеса НЛА типа ВТ ическими отверстиями.

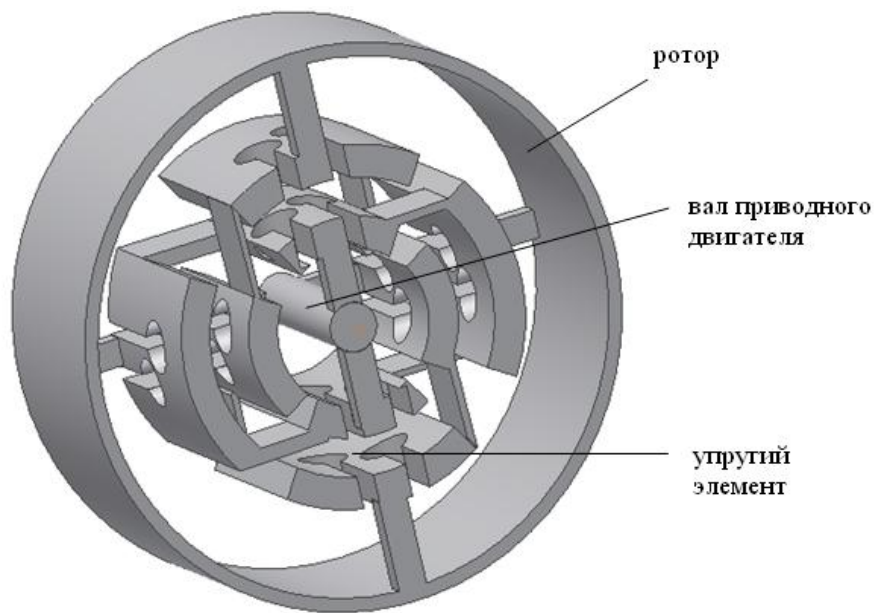


Рис. 3. Конструкция упругого подвеса ДНГ серии ГВК

Отметим общие конструктивные особенности типовых элементов рассмотренных упругих подвесов. Это, прежде всего, абсолютная симметрия типового элемента, а также прямолинейность его продольной линии.

Определение жесткостных характеристик упругих элементов

В общем случае жесткостные характеристики упругого элемента описываются квадратными матрицами (размером 6×6) податливости $\Delta_{\{k\}}$

или жесткости $C_{\{k\}}$, определенными в k -ой системе координат $O_k x_k y_k z_k$ и имеющими следующий вид:

$$\Delta_{\{k\}} = \left[\delta_{\{k\}ij} \right], \quad (i, j = \overline{1,6}) ;$$

$$C_{\{k\}} = \left[c_{\{k\}ij} \right], \quad (i, j = \overline{1,6}) .$$

Здесь для матриц жесткости и податливости будет справедливым следующее выражение:

$$C_{\{k\}} = \Delta_{\{k\}}^{-1} . \quad (1)$$

Для определения матрицы податливости $\Delta_{\{k\}}$ необходимо рассмотреть следующую схему нагружения исследуемого упругого элемента, которая предусматривает для его одного конца – жесткое закрепление с основанием, а для второго – жесткое соединение с полюсом O_k . Тогда элемент $\delta_{\{k\}ij}$, $(i, j = \overline{1,6})$ матрицы податливости $\Delta_{\{k\}}$ находится как i -ая компонента обобщенного перемещения полюса O_k , при его нагружении j -ой компонентой обобщенной силы, единичной величины. Таким образом, можем определить элементы $\delta_{\{k\}ij}$, $(i, j = \overline{1,6})$ согласно следующему выражению:

$$\delta_{\{k\}ij} = q_{\{k\}i} \left| \overline{Q}_{\{k\}j} = 1 \right. , \quad (i, j = \overline{1,6}) . \quad (2)$$

Здесь $q_{\{k\}i}$ ($i = \overline{1,6}$) – i -ая компонента обобщенного перемещения, характеризующая линейное перемещение полюса в направлении осей $O_k x_k$ ($i=1$), $O_k y_k$ ($i=2$) и $O_k z_k$ ($i=3$), а также угловое перемещение полюса относительно осей $O_k x_k$ ($i=4$), $O_k y_k$ ($i=5$) и $O_k z_k$ ($i=6$);

$\overline{Q}_{\{k\}j}$ ($j = \overline{1,6}$) – j -ая компонента обобщенной силы, характеризующая приложенную в полюсе единичную силу в направлении осей $O_k x_k$ ($j=1$), $O_k y_k$ ($j=2$) и $O_k z_k$ ($j=3$), а также единичной величины момент относительно осей $O_k x_k$ ($j=4$), $O_k y_k$ ($j=5$) и $O_k z_k$ ($j=6$).

Отметим, что для упругих элементов, имеющих, как правило, симметричную форму, может существовать система нормальных координат $Ox_0 y_0 z_0$, которая характеризуется отсутствием перекрестных связей между компонентами действующих обобщенных сил и соответствующих компонент обобщенных перемещений. Таким образом, если координатная система $Ox_0 y_0 z_0$ будет системой нормальных координат для рассматриваемого упругого элемента, то его матрица податливости

$\Delta_{\{0\}}$, определяемая в координатной системе $Ox_0y_0z_0$, приобретает диагональную форму:

$$\Delta_{\{0\}} = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6).$$

При этом матрица жесткости упругого элемента $C_{\{0\}}$ будет также иметь диагональную форму:

$$C_{\{0\}} = \text{diag}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),$$

где элементы c_i матрицы жесткости $C_{\{0\}}$ могут быть найдены по следующей формуле:

$$c_i = \delta_i^{-1} \quad (i = \overline{1,6}). \quad (3)$$

Жесткостные характеристики типового упругого элемента микромеханического гироскопа

Типовой элемент упругого подвеса ММГ представляет собой прямолинейный стержень длиной L_{cm} , имеющий постоянное по длине прямоугольное поперечное сечение шириной b_{cm} и толщиной h_{cm} (рис. 4). Причем между геометрическими размерами типовых элементов упругого подвеса ММГ выдерживается соотношение

$$L_{cm} \gg b_{cm}, h_{cm}. \quad (4)$$

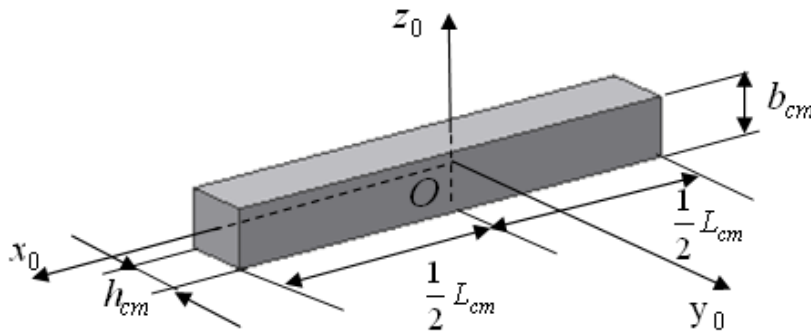


Рис.4 Типовой элемент упругого подвеса ММГ

Отметим, что для определения перемещений точек нагруженного стержня можно воспользоваться формулой Мора [2]. Тогда в соответствии с выражением (2) формула для определения элементов $\delta_{\{k\}ij}^{(cm)}$, $(i, j = \overline{1,6})$ матрицы податливости $\Delta_{\{k\}}^{(cm)}$ типового элемента упругого подвеса ММГ будет иметь следующий вид:

$$\delta_{\{k\}ij}^{(cm)} = \int_{(L)} \left(\frac{\overline{N}_i \overline{N}_j}{E_{cm} F_{cm}} + k_{cm}^y \frac{\overline{P}_i^y \overline{P}_j^y}{G_{cm} F_{cm}} + k_{cm}^z \frac{\overline{P}_i^z \overline{P}_j^z}{G_{cm} F_{cm}} + \frac{\overline{M}_i^{kp} \overline{M}_j^{kp}}{G_{cm} J_{cm}^{kp}} + \frac{\overline{M}_i^y \overline{M}_j^y}{E_{cm} J_{cm}^y} + \frac{\overline{M}_i^z \overline{M}_j^z}{E_{cm} J_{cm}^z} \right) dL. \quad (5)$$

Г і р о с к о п і ч н і с и с т е м и

Здесь интегрирование проводится по всей длине L упругого элемента;

$$i, j = \overline{1, 6};$$

\overline{N}_i и $\overline{P}_i^y, \overline{P}_i^z$ – продольное и поперечные усилия, обусловленные действием в полюсе O_k единичной i -ой компоненты обобщенной силы ($Q_{\{k\}i} = 1$);

\overline{M}_i^{kp} и $\overline{M}_i^y, \overline{M}_i^z$ – крутящее и изгибающие моментные усилия, обусловленные действующей в полюсе i -ой компонентой обобщенной силы единичной величины ($Q_{\{k\}i} = 1$);

E_{cm} и G_{cm} – модули упругости первого и второго рода материала стержня;

$F_{cm}, J_{cm}^{kp}, J_{cm}^y, J_{cm}^z$ – геометрические характеристики поперечного сечения стержня;

$$F_{cm} = b_{cm} h_{cm} \text{ – площадь поперечного сечения;}$$

$J_{cm}^{kp} = \beta_{cm} b_{cm} h_{cm}^3$ – момент инерции при кручении поперечного сечения стержня;

β_{cm} , ($0,141 \leq \beta_{cm} \leq 0,333$) – безразмерный коэффициент, зависящий от величины отношения толщины и ширины в поперечном сечении стержня ($b_{cm} / h_{cm} = 1 \Rightarrow \beta_{cm} = 0,141$; $b_{cm} / h_{cm} \approx \infty \Rightarrow \beta_{cm} = 0,333$);

$J_{cm}^y = \frac{1}{12} h_{cm} b_{cm}^3$ – момент инерции поперечного сечения на изгиб относительно оси $O_k y_k$;

$J_{cm}^z = \frac{1}{12} b_{cm} h_{cm}^3$ – момент инерции поперечного сечения на изгиб относительно оси $O_k z_k$;

k_{cm}^y и k_{cm}^z – коэффициенты формы при сдвиге в направлении осей $O_k y_k$ и $O_k z_k$ (для прямоугольного поперечного сечения $k_{cm}^y = k_{cm}^z = \frac{6}{5}$).

Если мысленно представить полюс O размещенным в центре рассматриваемого стержня (при этом соединенным абсолютно жесткой связью с его свободным концом), то координатная система $Ox_0 y_0 z_0$ (рис. 4), в которой ось Ox_0 направлена вдоль продольной оси стержня, а оси Oy_0 и Oz_0 вдоль его осей симметрии, будет являться системой нормальных координат.

В этом случае согласно выражению (5) элементы $\delta_i^{(cm)}$ ($i = \overline{1,6}$) диагональной матрицы податливости стержня $\Delta_{\{0\}}^{(cm)}$ будут определяться по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \delta_1^{(cm)} &= \int_{-\frac{1}{2}L_{cm}}^{\frac{1}{2}L_{cm}} \frac{dx}{E_{cm}F_{cm}}; & \delta_2^{(cm)} &= \int_{-\frac{1}{2}L_{cm}}^{\frac{1}{2}L_{cm}} \left(\frac{k_{cm}^y}{G_{cm}F_{cm}} + \frac{x^2}{E_{cm}J_{cm}^z} \right) dx; \\ \delta_3^{(cm)} &= \int_{-\frac{1}{2}L_{cm}}^{\frac{1}{2}L_{cm}} \left(\frac{k_{cm}^z}{G_{cm}F_{cm}} + \frac{x^2}{E_{cm}J_{cm}^y} \right) dx; & \delta_4^{(cm)} &= \int_{-\frac{1}{2}L_{cm}}^{\frac{1}{2}L_{cm}} \frac{dx}{G_{cm}J_{cm}^{кр}}; \\ & ; & & \\ \delta_5^{(cm)} &= \int_{-\frac{1}{2}L_{cm}}^{\frac{1}{2}L_{cm}} \frac{dx}{E_{cm}J_{cm}^y}; & \delta_6^{(cm)} &= \int_{-\frac{1}{2}L_{cm}}^{\frac{1}{2}L_{cm}} \frac{dx}{E_{cm}J_{cm}^z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда определяемые согласно выражениям (3) и (6) элементы $c_i^{(cm)}$ ($i = \overline{1,6}$) диагональной матрицы жесткости стержня $C_{\{0\}}^{(cm)}$ будут определяться по следующим формулам:

$$\begin{aligned} c_1^{(cm)} &= E_{cm} \frac{b_{cm}h_{cm}}{L_{cm}}; & c_2^{(cm)} &= E_{cm} \frac{b_{cm}h_{cm}^3}{L_{cm}^3}; & c_3^{(cm)} &= E_{cm} \frac{h_{cm}b_{cm}^3}{L_{cm}^3}; \\ c_4^{(cm)} &= \beta_{cm} G_{cm} \frac{b_{cm}h_{cm}^3}{L_{cm}}; & c_5^{(cm)} &= E_{cm} \frac{h_{cm}b_{cm}^3}{12L_{cm}}; & c_6^{(cm)} &= E_{cm} \frac{b_{cm}h_{cm}^3}{12L_{cm}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Оценка адекватности формул (7), проводимая при помощи пакета конечно-элементного анализа NASTRAN, показала их достаточно высокую точность. Относительная погрешность получаемых численных значений жесткостей не превышала 1%.

Жесткостные характеристики типовых элементов упругих подвесов низкочастотных линейных акселерометров

Типовой элемент упругого подвеса НЛА представляет собой пластину постоянной толщины h_{nl} . Длина пластины – L_{nl} , ширина – b_{nl} (рис. 5). Причем между геометрическими размерами типовых элементов упругого подвеса НЛА выдерживается следующее соотношение:

$$L_{nl}, b_{nl} \gg h_{nl}. \quad (8)$$

Выберем систему координат $Ox_0y_0z_0$ в качестве базовой для определения жесткостных характеристик пластины. В этой координатной

системе начало координат O размещается в центре пластины, а оси координат направлены следующим образом: ось Ox_0 совпадает по направлению с продольной осью пластины, а оси Oy_0 и Oz_0 – с поперечными направлениями, соответствующими толщине и ширине пластины (рис. 5).

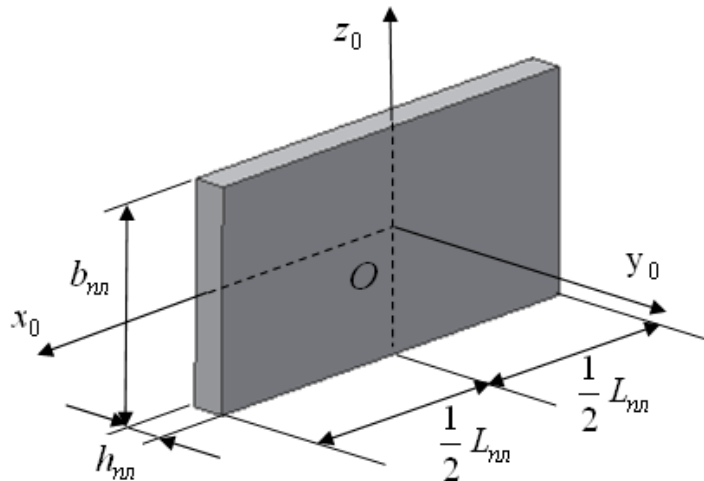


Рис. 5. Типовой элемент упругого подвеса НЛА

Для расчета жесткостных характеристик рассматриваемой пластины представим ее разрезанной по координате Oz_0 на элементарные участки шириной dz , полагая (для сохранения единства формул при различных значениях длины пластины) справедливым следующее соотношение:

$$dz \gg h_{nl}. \quad (9)$$

При этом связи в поперечном направлении Oz_0 , которые имеются в реальной пластине и отсутствуют в разрезанной, компенсируем с помощью введения эффективного модуля упругости материала пластины E_{nl}^* , который описывается следующим выражением [3]:

$$E_{nl}^* = \frac{E_{nl}}{1 - \mu_{nl}^2}, \quad (10)$$

где E_{nl} – модуль упругости первого рода материала пластины;

μ_{nl} – коэффициент Пуассона материала пластины.

Таким образом, вместо рассматриваемой пластины имеем конструкцию, состоящую из набора элементарных стержней, соответствующие концы которых жестко связаны между собой. При этом схема для испытаний (при определении жесткостных характеристик этой конструкции) имеет такое построение, что один конец каждого элементарного стержня жестко связан с основанием, а второй – с полюсом, совпадающим с началом базовой системы координат O (рис. 5).

Отметим, что матрица жесткости $C_{\{0\}}^{(nl)}$ конструкции, состоящей из «параллельно» соединенных элементарных стержней, равна бесконечной сумме матриц жесткости $C_{\{0\}}^{(cm.nl)}$ элементарных стержней [2]:

$$C_{\{0\}}^{(nl)} = \sum_1^{\infty} C_{\{0\}}^{(cm.nl)}. \quad (11)$$

При этом для расчета матриц жесткости $C_{\{0\}}^{(cm.nl)}$ элементарных стержней, на которые разрезана рассматриваемая пластина, можно воспользоваться выражением (5), применяемым при расчете стержней, а также формулами (1) или (3).

Как показывают исследования, координатная система $Ox_0y_0z_0$ для рассматриваемой пластины (а также для соответствующей ей конструкции, состоящей из элементарных стержней) является системой нормальных координат. Следовательно, матрица жесткости пластины $C_{\{0\}}^{(nl)}$ в системе нормальных координат $Ox_0y_0z_0$ будет иметь диагональную форму

$$C_{\{0\}}^{(nl)} = \text{diag}(c_1^{(nl)}, c_2^{(nl)}, c_3^{(nl)}, c_4^{(nl)}, c_5^{(nl)}, c_6^{(nl)}),$$

где диагональные элементы $c_i^{(nl)}$ ($i = \overline{1,6}$) матрицы жесткости $C_{\{0\}}^{(nl)}$ описывают линейную жесткость в направлении осей Ox_0 ($i=1$), Oy_0 ($i=2$) и Oz_0 ($i=3$), а также угловую жесткость относительно осей Ox_0 ($i=4$), Oy_0 ($i=5$) и Oz_0 ($i=6$).

Тогда, переходя от бесконечных сумм (11) к интегралам (интегрирование ведется по всей ширине пластины), получим следующие выражения для элементов $c_i^{(nl)}$ ($i = \overline{1,6}$) диагональной матрицы жесткости пластины $C_{\{0\}}^{(nl)}$ в системе нормальных координат $Ox_0y_0z_0$:

$$\begin{aligned} c_1^{(nl)} &= \int_{-\frac{1}{2}b_{nl}}^{\frac{1}{2}b_{nl}} \frac{E_{nl}^* h_{nl} dz}{L_{nl}}; & c_2^{(nl)} &= \int_{-\frac{1}{2}b_{nl}}^{\frac{1}{2}b_{nl}} \frac{E_{nl}^* h_{nl}^3 dz}{L_{nl}^3}; \\ c_3^{(nl)} &= \left[\left(\frac{5G_{nl}}{6L_{nl}} \int_{-\frac{1}{2}b_{nl}}^{\frac{1}{2}b_{nl}} h_{nl} dz \right)^{-1} + \left(\frac{12E_{nl}^*}{L_{nl}^3} \int_{-\frac{1}{2}b_{nl}}^{\frac{1}{2}b_{nl}} h_{nl} z^2 dz \right)^{-1} \right]^{-1}; \\ c_4^{(nl)} &= \int_{-\frac{1}{2}b_{nl}}^{\frac{1}{2}b_{nl}} \left(\frac{1}{3} \frac{G_{nl} h_{nl}^3}{L_{nl}} + \frac{E_{nl}^* h_{nl}^3 z^2}{L_{nl}^3} \right) dz; & c_5^{(nl)} &= \int_{-\frac{1}{2}b_{nl}}^{\frac{1}{2}b_{nl}} \frac{E_{nl}^* h_{nl} z^2 dz}{L_{nl}}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$c_6^{(nl)} = \int_{-\frac{1}{2}b_{nl}}^{\frac{1}{2}b_{nl}} \frac{E_{nl}^* h_{nl}^3 dz}{12L_{nl}}.$$

Тогда, согласно выражениям (12), элементы $c_i^{(nl)}$ ($i = \overline{1,6}$) диагональной матрицы жесткости пластины $C_{\{0\}}^{(nl)}$ будут определяться по следующим формулам:

$$\begin{aligned} c_1^{(nl)} &= E_{nl}^* \frac{h_{nl} b_{nl}}{L_{nl}}; & c_2^{(nl)} &= E_{nl}^* \frac{h_{nl}^3 b_{nl}}{L_{nl}^3}; & c_3^{(nl)} &= \left(\frac{6L_{nl}}{5G_{nl} h_{nl} b_{nl}} + \frac{L_{nl}^3}{E_{nl}^* h_{nl} b_{nl}^3} \right)^{-1}; \\ c_4^{(nl)} &= \frac{G_{nl} h_{nl}^3 b_{nl}}{3L_{nl}} + \frac{E_{nl}^* h_{nl}^3 b_{nl}^3}{12L_{nl}^3}; & c_5^{(nl)} &= E_{nl}^* \frac{h_{nl} b_{nl}^3}{12L_{nl}}; & c_6^{(nl)} &= E_{nl}^* \frac{h_{nl}^3 b_{nl}}{12L_{nl}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Проверка адекватности формул (13), проводимая при помощи пакета конечно-элементного анализа NASTRAN, показала, что относительная погрешность получаемых численных значений жесткостей в нерабочих направлениях упругого элемента не превышала 5%, а в рабочих направлениях – 1%. Эти результаты свидетельствуют о высокой эффективности формул (13).

Жесткостные характеристики типовых элементов упругих подвесов динамически настраиваемых гироскопов

Типовой элемент подвеса ДНГ представляет собой прямолинейный упругий элемент, образованный двумя цилиндрическими отверстиями с радиусом $\rho_{эл}$. Рассматриваемый типовой элемент имеет постоянную по длине ширину $b_{эл}$ и переменную толщину $h_{эл}$, которая в наиболее узкой части упругого элемента обладает величиной h_0 (рис. 6). Причем, между геометрическими параметрами типовых элементов упругого подвеса ДНГ выдерживается соотношение

$$\rho_{эл}, b_{эл} \gg h_0. \quad (14)$$

В качестве базовой (для определения жесткостных характеристик) выбираем координатную систему $Ox_0 y_0 z_0$, являющуюся системой нормальных координат рассматриваемого типового элемента. В этой координатной системе начало координат O размещается в центре упругого элемента, а оси координат направлены следующим образом: ось Ox_0 совпадает по направлению с продольной его осью, а оси Oy_0 и Oz_0 – с поперечными направлениями, соответствующими толщине и ширине рассматриваемого упругого элемента (рис. 6).

Матрица жесткости типового элемента ДНГ $C_{\{0\}}^{(эл)}$ в системе нормальных координат $Ox_0y_0z_0$ будет иметь диагональную форму

$$C_{\{0\}}^{(эл)} = \text{diag}(c_1^{(эл)}, c_2^{(эл)}, c_3^{(эл)}, c_4^{(эл)}, c_5^{(эл)}, c_6^{(эл)}) ,$$

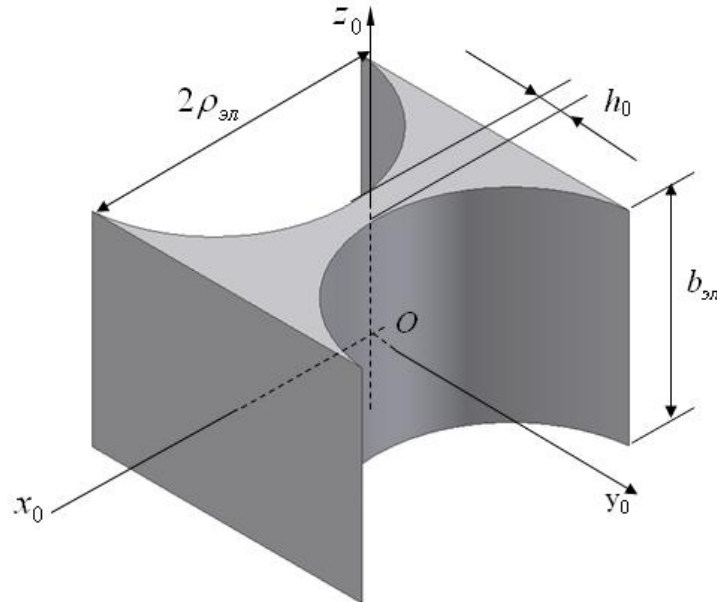


Рис. 6. Типовой элемент ДНГ

где диагональные элементы $c_i^{(эл)}$ ($i = \overline{1,6}$) матрицы жесткости $C_{\{0\}}^{(эл)}$ описывают линейную жесткость в направлении осей Ox_0 ($i=1$), Oy_0 ($i=2$) и Oz_0 ($i=3$), а также угловую жесткость относительно осей Ox_0 ($i=4$), Oy_0 ($i=5$) и Oz_0 ($i=6$).

В соответствии с соотношением геометрических параметров (14), типовой элемент ДНГ представляет собой пластину переменного поперечного сечения, и расчет жесткостных характеристик рассматриваемого типового элемента можно проводить аналогично предыдущему расчету пластины постоянного поперечного сечения. Если,

согласно соотношению (14), обозначить $k_{эл} = \sqrt{\frac{h_0}{\rho_{эл}}} \ll 1$ малый параметр, то

с точностью до величин более высокого порядка малости относительно $k_{эл}$ можем записать следующие приближенные выражения жесткостей типового элемента ДНГ:

$$\begin{aligned} c_1^{(эл)} &\approx \frac{1}{\pi} E_{эл}^* k_{эл} b_{эл}; & c_2^{(эл)} &\approx \frac{2}{3\pi} E_{эл}^* k_{эл}^3 b_{эл}; & c_3^{(эл)} &\approx \frac{5}{6\pi} G_{эл} k_{эл} b_{эл}; \\ c_4^{(эл)} &\approx \frac{1}{18\pi} E_{эл}^* k_{эл}^3 b_{эл}^3; & c_5^{(эл)} &\approx \frac{1}{12\pi} E_{эл}^* k_{эл} b_{эл}^3; & c_6^{(эл)} &\approx \frac{2}{9\pi} E_{эл}^* \rho_{эл}^2 k_{эл}^5 b_{эл}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $E_{эл}^* = \frac{E_{эл}}{1 - \mu_{эл}^2}$ – эффективный модуль упругости материала элемента;

$E_{эл}$ и $\mu_{эл}$ – модуль упругости первого рода и коэффициент Пуассона материала упругого элемента.

Проверка адекватности формул (15), проводимая с помощью пакета конечно-элементного анализа NASTRAN, показала их высокую эффективность. Относительная погрешность получаемых численных величин жесткости в нерабочих направлениях упругого элемента не превышала 10%, а погрешность рабочей угловой жесткости составляла менее 1%.

Выводы

Проведенный анализ конструкций упругих подвесов навигационных датчиков позволил выявить следующие типовые элементы:

- в микромеханических гироскопах – стержни постоянного сечения;
- в низкочастотных линейных акселерометрах – пластины с постоянным поперечным сечением;
- в динамически настраиваемых гироскопах – пластины с переменным поперечным сечением, образованным двумя цилиндрическими отверстиями.

В соответствии с разработанной методикой, получены высокоэффективные аналитические формулы для расчета жесткостных характеристик рассмотренных типовых элементов.

Список використаної літератури

1. Бондар П.М., Бублик Г.Ф., Петренко С.Ф., Цисарж В.В. Тенденції розвитку інерціальних систем орієнтації, навігації та керування рухом. Частина 1. Інерціальні системи орієнтації і навігації // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2000.-№3.-С.61-79.
2. Феодосьев В.И. Соппротивление материалов.-М.:Наука,1979.
3. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов: Учебное пособие для студентов авиац. спец. вузов.-М.Высш. шк., 1985.- 392 с.

О.М. Безвесільна, Н.В. Гнатейко

АВТОМАТИЧНА СИСТЕМА ВИСОКОТОЧНОГО ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ В ДИНАМІЦІ

Вступ. Постановка задачі

В сучасних астронавігації, геодезії, метрології, верстатобудуванні, в системах спостереження за рухомими об'єктами для точного визначення їх координат і руху, в авіації і космонавтиці, тощо, мають широке застосування різні засоби точного вимірювання кутів для визначення рішень.

Однак, більшість з них не мають потрібної високої точності, або працюють повільно у ручному або напівавтоматичному режимі, що не забезпечує потрібних до них вимог.

Одним з перспективних рішень такої задачі є розроблення систем точного вимірювання кутів за допомогою використання чутливих перетворювачів у вигляді лазерних гіроскопів, що дає можливість за допомогою оптичних засобів здійснювати високоточні вимірювання кутів знаходження об'єктів в динаміці на будь-якій відстані, з одного боку, і в автоматичному режимі – з іншого.

Принцип побудови автоматичної кутовимірювальної системи

На кафедрі приладобудування НТУУ "КПІ" була розроблена та апробована автоматична система високоточного вимірювання кутів у динаміці руху об'єкта за допомогою оптичного пристрою – автоколіматора і лазерного гіроскопа в якості чутливого елемента виміру. Спрощена функціональна схема такої системи представлена на рис. 1.

На обертовому пристрої 1 точно встановлено предметний столик 2, на якому точно по осі закріплена багатогранна інструментальна призма 3, кути якої підлягають точному вимірюванню при постійному обертанні столика. Під ним точно встановлений лазерний гіроскоп 4 (ЛГ). Пристрій 1 обертається з постійною швидкістю за допомогою електродвигуна 5, який керується блоком 6 у вигляді електроприводу – генератора ТВЧ.

Обертання призми реєструє встановлений на підставці щільний фотоелектричний автоколіматор 7. При обертанні обертового пристрою 1 з призмою від кожної її грані відбивається промінь світла, який подається з автоколіматора 7, який приймає промінь і видає електричні імпульси на керуючий блок 9. Від блоку прив'язки 8 базової, вихідної грані призми

Г і р о с к о п і ч н і с и с т е м и

отримують сигнал селекції першої грані, за допомогою якого блоком керування 9 виділяється імпульс автоколіматора від першої грані призми 3. Цей імпульс – сигнал запускає лічильник імпульсів 11, який починає підраховувати число періодів сигналу від ЛГ4.

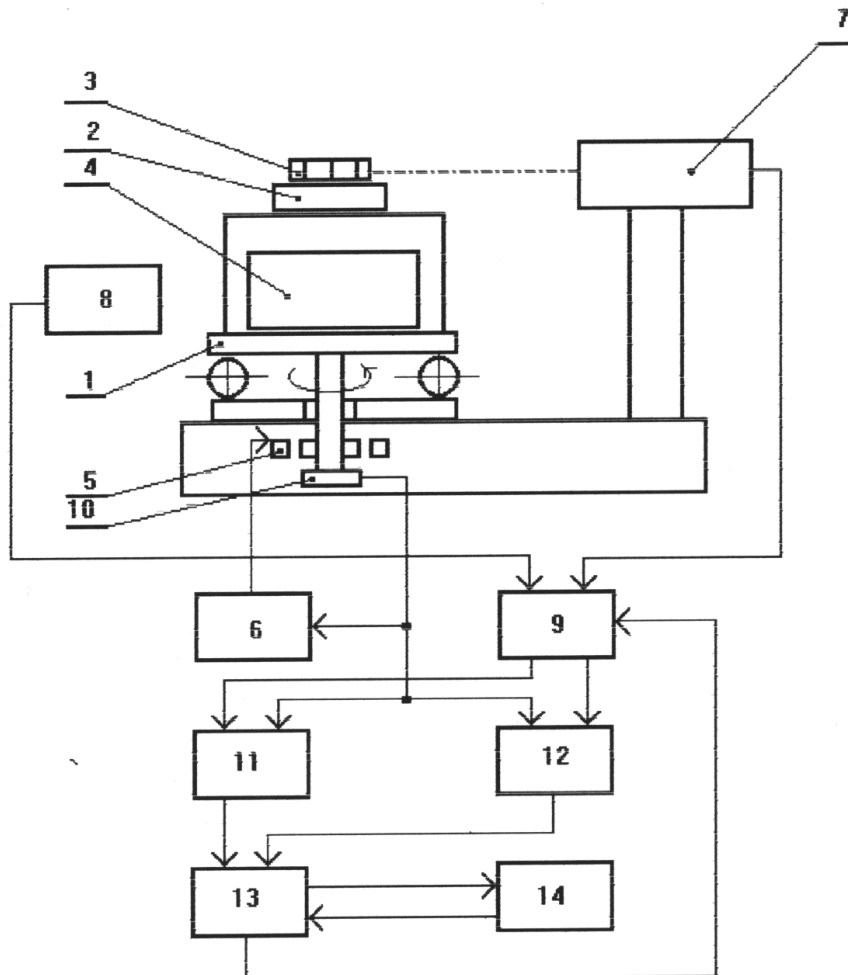


Рис. 1. Схема автоматичного пристрою контролю кутів

Імпульсом з автоколіматора 7 від наступної грані призми лічильник 11 вимикається і зупиняється, чим закінчує підрахунок числа періодів сигналу з ЛГ, а лічильник 12 вмикається керуючим блоком 9 і починає відрахунок імпульсів. Таким чином, надходження імпульсу з автоколіматора 7 від кожної чергової грані призми вимикає один лічильник і вмикає другий (або 11, або 12).

Інформація з лічильників 11 та 12 за допомогою пристрою зв'язку 13 передається на ЕОМ 14, де проводиться її аналіз і підрахунки по наступній методиці.

На ЕОМ за один повний оберт обертового пристрою 1 отримують послідовно такі числа:

З лічильника 11:

$$N_1 = \int_{t_1}^{t_2} f_{out}(t) dt;$$

$$N_3 = N_1 + \int_{t_3}^{t_4} f_{out}(t) dt;$$

$$N_{n-1} = N_{n-3} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f_{out}(t) dt;$$

З лічильника 12:

$$N_2 = \int_{t_2}^{t_3} f_{out}(t) dt;$$

$$N_4 = N_2 + \int_{t_4}^{t_5} f_{out}(t) dt;$$

$$N_n = N_{n-2} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_{out}(t) dt;$$

де індекс при N – номер записаної величини числа;

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n+1}$ – час надходження імпульсів з автоколіматора, які надходять від першої, другої і т. д. граней призми, що обертається з відомою швидкістю.

Виміряні кути при відліку кутів від базової грані призми обчислюються ЕОМ за формулою:

$$\phi_i = 2\pi \frac{N_{i-1} + N_i}{N_{n-1} + N_n} = 2\pi \frac{N_\phi}{N_{2\pi}},$$

при $N_{i-1}=0$, коли $i=1$, а загальне $i=1 \dots n$.

Висновок

Розроблена перша автоматична система для високоточних вимірювань кутів у динамічному режимі обмірюваних об'єктів з отриманням автоматично на ЕОМ результату.

Як показала апробація роботи такої системи, точність отриманих результатів вимірювання кутів вкладається в похибку величиною 0,3” (три десятих кутових секунд) зі значною надійністю отримання вимірювань.

Список використаної літератури

1. *Эйдинов В.Я.* Измерение углов в машиностроении.- М.: Гос. Издательство стандартов, 1963. – 414 с.
2. *Пролетко В.И., Иносов В.Л.* Анализ погрешностей измерения плоского угла в интервале времени. – Измерительная техника, 1974, №1.-с. 11-14.
3. *Богданов А.П., Хлебников Ф.П., Цесняк Л.С.* Автоматизированный контроль многогранных призм.// Опт.-механ. Промышленность, 1978, №7. –с.3-5.
4. *Блантер Б.Э., Филатов Ю.В.* Экспериментальное исследование точности измерительного преобразователя угла на основе кольцевого оптического лазера. // Метрология, №1.- с.3-8.

Е.А. Бондаренко

РАСЧЕТ СМЕЩЕНИЙ ЦЕНТРА СВЕТОВОГО ПЯТНА ГАУССОВА ПУЧКА НА ПОВЕРХНОСТЯХ ЗЕРКАЛ В РАЗЪЮСТИРОВАННОМ РЕЗОНАТОРЕ ЛАЗЕРНОГО ГИРОСКОПА

1 Введение

Среди основных типов кольцевых оптических резонаторов, которые применяются в конструкциях лазерных гироскопов (ЛГ), можно выделить класс плоских N -угольных резонаторов ($N \geq 3$), образованных сферическими зеркалами разных радиусов кривизны, участками пустого пространства и содержащих в плечах плоскопараллельные пластины. Последние могут выступать, например, в качестве выходных брюстеровских окон газоразрядных трубок [1–4], либо служить простейшими аппроксимационными моделями активной среды в виде плоскопараллельного слоя с отличным от единицы показателем преломления.

Осевой контур [5–11] в таком идеально выполненном резонаторе, – а он физически представляет собой продольную ось симметрии гауссова пучка рабочей TEM_{00q} моды ЛГ и определяет в любом произвольном его поперечном сечении центр светового пятна этого пучка, – всюду совпадает с номинальной оптической осью и проходит через центры зеркал.

В реальном же (или неидеально выполненном) резонаторе ЛГ, который ниже будем коротко называть разъюстированным резонатором, – зеркала в силу разных причин смещены относительно своих номинальных положений. Как следствие, в таком – разъюстированном резонаторе – осевой контур отклонен от номинальной оптической оси и через центры зеркал не проходит.

В этой связи возникает потребность в решении следующей задачи: в рамках линейного приближения рассчитать смещения центра светового пятна гауссова пучка на поверхностях зеркал в резонаторе ЛГ рассматриваемого типа.

В литературе опубликованного полного решения названной задачи для указанного типа резонаторов ЛГ найти не удалось. Можно лишь назвать работу [12], в которой приведено её решение для частного случая пустого N -зеркального резонатора ЛГ правильной формы.

2 Описание расчетной оптической схемы плеча резонатора ЛГ

На рис. 1 изображена расчетная оптическая схема одного из плеч N -угольного резонатора ЛГ. Плечо образовано зеркалами M_i и M_{i+1} с радиусами кривизны соответственно, R_i и R_{i+1} . Плечо содержит K идеально выполненных плоскопараллельных пластин и $J = K + 1$ участков пустого пространства (показан случай $K = 2$, $J = 3$).

На рис. 1 обозначено:

x^i, y^i, z^i и $x^{i+1}, y^{i+1}, z^{i+1}$ – орты координатных базисов, введенных для задания ориентации осевого контура на участках пустого пространства в i -ом и $(i+1)$ -ом плечах резонатора. Орты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x^i &= -x^{i+1} \cos 2\theta_i - z^{i+1} \sin 2\theta_i, & y^i &= y^{i+1}, \\ z^i &= x^{i+1} \sin 2\theta_i - z^{i+1} \cos 2\theta_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где $2\theta_i$ – угол, который образуют между собой названные плечи;

w^i, v^i, u^i – орты координатного базиса, введенного для задания линейных и угловых смещений зеркала M_i (орт w^i направлен вдоль биссектрисы угла $2\theta_i$):

$$w^i = x^i \sin \theta_i + z^i \cos \theta_i, \quad v^i = y^i, \quad u^i = -x^i \cos \theta_i + z^i \sin \theta_i; \quad (2)$$

O_i – точка, определяющая номинальное положение центра C_i зеркала M_i ; T_i – точка встречи осевого контура с отражающей поверхностью зеркала M_i . Именно в этой точке на поверхности зеркала находится центр светового пятна гауссова пучка;

$$f^i = w_i w^i + v_i v^i + u_i u^i \quad (3)$$

– вектор малого линейного смещения зеркала M_i (w_i и u_i – соответственно нормальное и тангенциальное смещения в осевой плоскости; v_i – бинормальное смещение в сагиттальной плоскости);

W^i, V^i, U^i – орты координатного базиса, связанного с зеркалом M_i и имеющего начало в его центре C_i (орт W^i нормален к отражающей поверхности зеркала):

$$W^i = w^i + \gamma_i v^i - \beta_i u^i, \quad V^i = v^i - \gamma_i w^i, \quad U^i = u^i + \beta_i w^i. \quad (4)$$

Здесь β_i и γ_i – соответственно углы малого поворота зеркала M_i в осевой плоскости вокруг орта v^i и в сагиттальной плоскости вокруг орта u^i ;

g^i – вектор, характеризующий смещение на поверхности зеркала M_i центра T_i светового пятна гауссова пучка относительно центра C_i этого зеркала;

$$r^i = x_i x^i + y_i y^i + z_i z^i \quad (5)$$

– вектор, характеризующий отклонение точки T_i от точки O_i . Здесь x_i и y_i – соответственно линейные поперечные координаты осевого контура на входе в зеркало M_i в осевой и сагиттальной плоскостях; z_i – линейная продольная координата осевого контура на входе в это зеркало;

$$t^i = \phi_i x^i + \psi_i y^i + z^i \quad (|t^i| = 1) \quad (6)$$

– направляющий вектор осевого контура в i -ом плече резонатора на участках пустого пространства. Здесь ϕ_i и ψ_i – соответственно угловые координаты осевого контура на входе в зеркало M_i в осевой и сагиттальной плоскостях;

h_i^{i+1} – номинальная “габаритная” длина рассматриваемого плеча резонатора;

l_j – длина j -го участка пустого пространства ($j = 1, \dots, J$);

L_j – длина осевого контура на j -ом участке пустого пространства;

b_k и n_k – соответственно толщина k -ой плоскопараллельной пластины и показатель преломления материала, из которого она изготовлена ($k = 1, \dots, K$);

N^k – орт, нормальный к рабочей поверхности пластины. Он коллинеарен орту z_{pl}^k связанного с ней координатного базиса $\{x_{pl}^k, y_{pl}^k, z_{pl}^k\}$. В исходном положении пластины базисы $\{x_{pl}^k, y_{pl}^k, z_{pl}^k\}$ и $\{x^{i+1}, y^{i+1}, z^{i+1}\}$ совпадают. Конечная ориентация базиса $\{x_{pl}^k, y_{pl}^k, z_{pl}^k\}$ относительно $\{x^{i+1}, y^{i+1}, z^{i+1}\}$ задается с помощью двух углов. Первый поворот – на угол A_k – осуществляется вокруг орта z^{i+1} :

$$\begin{aligned} x_{pl}^{k*} &= x^{i+1} \cos A_k + y^{i+1} \sin A_k, & y_{pl}^{k*} &= -x^{i+1} \sin A_k + y^{i+1} \cos A_k, \\ z_{pl}^{k*} &= z^{i+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Орты x_{pl}^{k*} , y_{pl}^{k*} , z_{pl}^{k*} характеризуют промежуточную ориентацию базиса $\{x_{pl}^k, y_{pl}^k, z_{pl}^k\}$. Второй поворот – на угол α_k – осуществляется вокруг орта y_{pl}^{k*} .

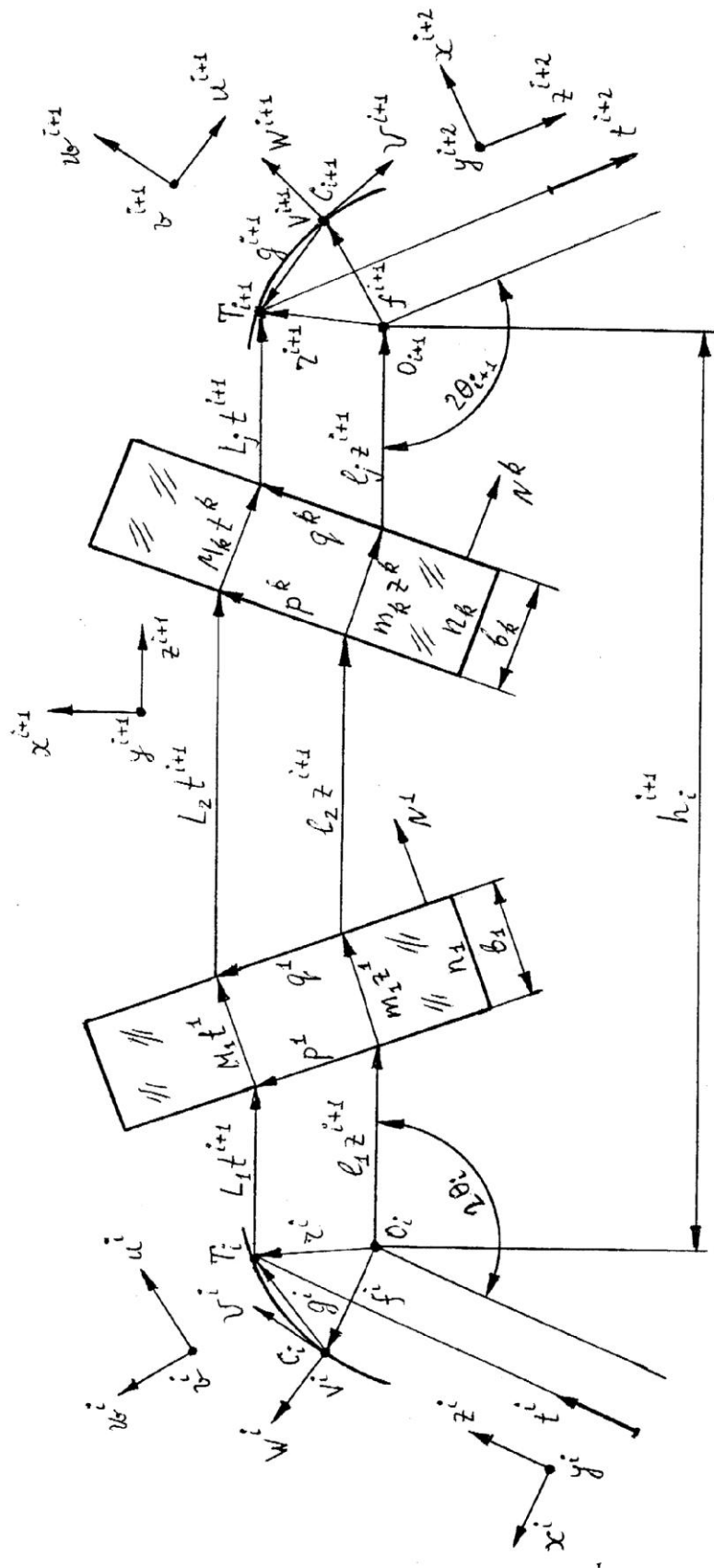


Рис. 1. Расчетная оптическая схема плеча резонатора ЛГ

В результате

$$\begin{aligned}x_{pl}^k &= (x^{i+1} \cos A_k + y^{i+1} \sin A_k) \cos \alpha_k - z^{i+1} \sin \alpha_k, \\y_{pl}^k &= -x^{i+1} \sin A_k + y^{i+1} \cos A_k, \\N^k = z_{pl}^k &= (x^{i+1} \cos A_k + y^{i+1} \sin A_k) \sin \alpha_k + z^{i+1} \cos \alpha_k.\end{aligned}\quad (8)$$

Из (8) вытекают следующие определения: A_k – азимутальный угол пластины; α_k – угол между нормалью к её рабочей поверхности и номинальной осью резонатора. (Например, если две плоскопараллельные пластины, изображенные на рис. 1, рассматривать как выходные брюстеровские окна газоразрядной трубки, тогда $b_1 = b_2 = b$, $n_1 = n_2 = n$, $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha = \arctg n$. Если трубка должна обеспечивать генерацию линейно поляризованного в осевой плоскости излучения, тогда $A_1 = A_2 = 0$. Именно этот случай и отображен на рисунке. Если же газоразрядная трубка должна обеспечивать генерацию излучения, линейно поляризованного в сагиттальной плоскости, тогда $A_1 = A_2 = \pi/2$);

$$\begin{aligned}z^k &= n_k^{-1} [d_k \sin \alpha_k (x^{i+1} \cos A_k + y^{i+1} \sin A_k) + (1 + d_k \cos \alpha_k) z^{i+1}] \quad (\\ & \quad |z^k| = 1)\end{aligned}\quad (9)$$

– направляющий вектор номинальной оси резонатора внутри пластины. Параметр d_k в (9) рассчитывается по формуле

$$d_k = (n_k^2 - \sin^2 \alpha_k)^{1/2} - \cos \alpha_k; \quad (10)$$

$$m_k = n_k b_k / (n_k^2 - \sin^2 \alpha_k)^{1/2} \quad (11)$$

– геометрическая длина номинальной оси резонатора внутри пластины; M_k – геометрическая длина осевого контура внутри пластины;

$$t^k = z^k + a_x x^{i+1} + a_y y^{i+1} + a_z z^{i+1} \quad (|t^k| = 1) \quad (12)$$

– направляющий вектор осевого контура внутри пластины. Здесь

$$\begin{aligned}a_x &= n_k^{-1} [(1 - c_k \sin^2 \alpha_k \cos^2 A_k) \phi_{i+1} - (c_k \sin^2 \alpha_k \sin A_k \cos A_k) \psi_{i+1}], \\a_y &= n_k^{-1} [-(c_k \sin^2 \alpha_k \sin A_k \cos A_k) \phi_{i+1} + (1 - c_k \sin^2 \alpha_k \sin^2 A_k) \psi_{i+1}], \\a_z &= n_k^{-1} [-c_k (\phi_{i+1} \cos A_k + \psi_{i+1} \sin A_k) \sin \alpha_k \cos \alpha_k],\end{aligned}\quad (13)$$

где, в свою очередь,

$$c_k = 1 - \cos \alpha_k / (n_k^2 - \sin^2 \alpha_k)^{1/2}; \quad (14)$$

p^k и q^k – векторы, характеризующие смещения центра светового пятна гауссова пучка соответственно на входной и выходной поверхностях пластины.

3 Исходные соотношения

Согласно [13, 14] систему $4N$ линейных алгебраических уравнений, связывающих между собой линейные поперечные $x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}$ и угловые $\phi_i, \psi_i, \phi_{i+1}, \psi_{i+1}$ координаты осевого контура на входе в соседние зеркала M_i и M_{i+1} плеча рассматриваемого резонатора ЛГ, можно представить в виде

$$\begin{cases} x_{i+1} + x_i - l_{i,xx}^{i+1} \phi_{i+1} + l_{i,xy}^{i+1} \psi_{i+1} = 2w_i \sin \theta_i, \\ y_{i+1} - y_i + l_{i,yx}^{i+1} \phi_{i+1} - l_{i,yy}^{i+1} \psi_{i+1} = 0, \\ \phi_{i+1} + \phi_i - p_i x_i = p_i (u_i \cos \theta_i - w_i \sin \theta_i) + 2\beta_i, \\ \psi_{i+1} - \psi_i + q_i y_i = q_i v_i - 2\gamma_i \cos \theta_i. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь $i = 1, \dots, N$. Если $i = N$, тогда $i + 1 = 1$.

В приведенной системе $p_i = 2R_i^{-1} \sec \theta_i$ и $q_i = 2R_i^{-1} \cos \theta_i$ – соответственно оптические силы зеркала M_i в осевой и сагиттальной плоскостях. В системе также обозначено:

$$\begin{aligned} l_{i,xx}^{i+1} &= \sum_{j=1}^J l_j + \sum_{k=1}^K (B_k^{**} \sin^2 A_k + B_k^* \cos^2 A_k), \\ l_{i,yy}^{i+1} &= \sum_{j=1}^J l_j + \sum_{k=1}^K (B_k^{**} \cos^2 A_k + B_k^* \sin^2 A_k), \\ l_{i,xy}^{i+1} &= l_{i,yx}^{i+1} = \sum_{k=1}^K (B_k^{**} - B_k^*) \sin A_k \cos A_k, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$B_k^* = n_k m_k \cos^2 \alpha_k / (n_k^2 - \sin^2 \alpha_k), \quad B_k^{**} = m_k / n_k. \quad (17)$$

В этих выражениях $\sum_{j=1}^J l_j$ – сумма длин участков пустого пространства в плече между зеркалами M_i и M_{i+1} ; B_k^* и B_k^{**} – B -элементы двумерной лучевой $ABCD$ – матрицы k -ой плоскопараллельной пластины,

рассматриваемой в повернутом на угол A_k вокруг орта z^{i+1} координатном базисе. Параметр m_k в (17) определен формулой (11).

4 Постановка задачи

В соответствии с рис. 1 вектор g^i характеризует смещение на поверхности зеркала M_i центра T_i светового пятна гауссова пучка относительно центра C_i этого зеркала. В базисе $\{W^i V^i U^i\}$, связанным с зеркалом и имеющим начало в его центре, вектор g^i можно представить в виде разложения

$$g^i = h_i W^i + s_i V^i + t_i U^i. \quad (18)$$

В идеально выполненном резонаторе ЛГ, для которого $w_i, v_i, u_i, \beta_i, \gamma_i = 0$, – осевой контур всюду совпадает с номинальной оптической осью и встречается с отражающей поверхностью каждого зеркала M_i в его центре C_i . При этом, разумеется, $g^i = 0$.

В разъюстированном же резонаторе ЛГ, для которого $w_i, v_i, u_i, \beta_i, \gamma_i \neq 0$, – осевой контур деформирован. Теперь он нигде не совпадает с номинальной оптической осью и встречается с отражающей поверхностью каждого зеркала M_i не в его центре C_i , а в точке T_i . В этом случае $g^i \neq 0$.

Требуется – на основе (15) получить систему линейных алгебраических уравнений, из которой можно было бы определить компоненты t_i и s_i вектора g^i , характеризующие смещения на поверхности зеркала M_i центра светового пятна гауссова пучка соответственно в осевой и сагиттальной плоскостях.

5 Решение задачи

Согласно рис. 1

$$g^i = r^i - f^i \quad (19)$$

или, с учетом (3), (5),

$$g^i = x_i x^i + y_i y^i + z_i z^i - w_i w^i - v_i v^i - u_i u^i. \quad (20)$$

На основании (2)

$$x^i = w^i \sin \theta_i - u^i \cos \theta_i, \quad y^i = v^i, \quad z^i = w^i \cos \theta_i + u^i \sin \theta_i. \quad (21)$$

После подстановки (21) в (20)

$$g^i = (x_i \sin \theta_i + z_i \cos \theta_i - w_i)w^i + (y_i - v_i)v^i + (-x_i \cos \theta_i + z_i \sin \theta_i - u_i)u \quad (22)$$

В свою очередь, согласно (4)

$$w^i = W^i - \gamma_i v^i + \beta_i u^i, \quad v^i = V^i + \gamma_i w^i, \quad u^i = U^i - \beta_i w^i. \quad (23)$$

В результате подстановки (23) в (22) и удерживания членов первого порядка малости

$$g^i = (x_i \sin \theta_i + z_i \cos \theta_i - w_i)W^i + (y_i - v_i)V^i + (-x_i \cos \theta_i + z_i \sin \theta_i - u_i)U \quad (24)$$

Из сопоставления (24) и (18) вытекает

$$\begin{aligned} h_i &= x_i \sin \theta_i + z_i \cos \theta_i - w_i, & s_i &= y_i - v_i, \\ t_i &= -x_i \cos \theta_i + z_i \sin \theta_i - u_i. \end{aligned} \quad (25)$$

В (25) фигурирует величина z_i , имеющая смысл линейной продольной координаты осевого контура на входе в зеркало M_i . Согласно формуле (33) в [13]

$$z_i = -x_i \operatorname{tg} \theta_i + w_i \operatorname{sec} \theta_i. \quad (26)$$

После подстановки (26) в (25) находим $h_i = 0$ и, кроме того,

$$t_i = -x_i \operatorname{sec} \theta_i + w_i \operatorname{tg} \theta_i - u_i, \quad s_i = y_i - v_i. \quad (27)$$

Формулы (27) позволяют рассчитать смещения t_i и s_i центра светового пятна гауссова пучка на поверхностях зеркал в разъюстированном резонаторе ЛГ. Для этого необходимо составить и затем найти аналитическое решение x_i, y_i ($i = 1, \dots, N$) системы линейных алгебраических уравнений (15), описывающей оптические свойства рассматриваемого резонатора. После чего найденные выражения для x_i и y_i следует подставить в (27). Такой вариант решения задачи предложен в [15].

Указанному подходу присущ, однако, один непринципиальный недостаток – необходимость проведения в соответствии с (27) дополнительных вычислительных операций. Этот недостаток можно устранить путем формирования на основе (15) новой системы линейных алгебраических уравнений, из которой можно было бы определить величины t_i и s_i непосредственно.

Синтез упомянутой системы выполнить несложно. Действительно, как следует из (27),

$$x_i = -(t_i + u_i)\cos\theta_i + w_i\sin\theta_i, \quad y_i = s_i + v_i. \quad (28)$$

Тогда, подставляя (28) в (15), приходим к искомой системе $4N$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных t_i , s_i , ϕ_i , ψ_i , из которой можно найти интересующие нас величины t_i и s_i :

$$\begin{cases} t_{i+1}\cos\theta_{i+1} + t_i\cos\theta_i + l_{i,xx}^{i+1}\phi_{i+1} - l_{i,xy}^{i+1}\psi_{i+1} = w_{i+1}\sin\theta_{i+1} - w_i\sin\theta_i \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - u_{i+1}\cos\theta_{i+1} - u_i\cos\theta_i, \\ s_{i+1} - s_i + l_{i,yx}^{i+1}\phi_{i+1} - l_{i,yy}^{i+1}\psi_{i+1} = -v_{i+1} + v_i, \\ \phi_{i+1} + \phi_i + p_i t_i \cos\theta_i = 2\beta_i, \\ \psi_{i+1} - \psi_i + q_i s_i = -2\gamma_i \cos\theta_i. \end{cases} \quad (29)$$

Здесь $i = 1, \dots, N$. Если $i = N$, тогда $i + 1 = 1$.

Таким образом, система уравнений (29) представляет собой результат решения сформулированной задачи.

6 Решение задачи для более простых конфигураций резонатора ЛГ

6.1 Плоский пустой N -зеркальный резонатор ЛГ произвольной формы

Такой резонатор не содержит плоскопараллельных пластин в плечах. Он образован зеркалами, участками пустого пространства и может иметь произвольную форму (например, равнобедренного треугольника). Для такого резонатора $l_{i,xy}^{i+1} = l_{i,yx}^{i+1} = 0$ и $l_{i,xx}^{i+1} = l_{i,yy}^{i+1} = h_i^{i+1} = l_i^{i+1}$, где l_i^{i+1} – номинальная длина плеча между зеркалами M_i и M_{i+1} . В этом случае общая система $4N$ уравнений (29) распадается на две отдельные системы $2N$ уравнений относительно неизвестных t_i , ϕ_i и s_i , ψ_i :

$$\begin{cases} t_{i+1}\cos\theta_{i+1} + t_i\cos\theta_i + l_i^{i+1}\phi_{i+1} = w_{i+1}\sin\theta_{i+1} - w_i\sin\theta_i - u_{i+1}\cos\theta_{i+1} - u_i\cos\theta_i \\ \phi_{i+1} + \phi_i + p_i t_i \cos\theta_i = 2\beta_i, \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} s_{i+1} - s_i - l_i^{i+1}\psi_{i+1} = -v_{i+1} + v_i, \\ \psi_{i+1} - \psi_i + q_i s_i = -2\gamma_i \cos\theta_i. \end{cases} \quad (31)$$

Системы (30) и (31) относятся соответственно к осевой и сагиттальной плоскостям. В этих системах $i = 1, \dots, N$. Если $i = N$, тогда $i + 1 = 1$.

6.2 Плоский пустой N -зеркальный резонатор ЛГ правильной формы

Такой резонатор имеет форму равностороннего N -угольника (как правило, $N = 3, 4$) и для него $h_i^{i+1} = l_i^{i+1} = l$, $\theta_i = \theta = \pi/2 - \pi/N$, $p_i = 2R_i^{-1} \sec \theta$, $q_i = 2R_i^{-1} \cos \theta$. В этом случае с помощью несложных преобразований можно вдвое уменьшить порядок систем уравнений (30) и (31), сформировав из них две системы N уравнений относительно неизвестных t_i и s_i в виде

$$(2 - \xi_i)t_i + t_{i+1} + t_{i-1} = (w_{i+1} - w_{i-1})tg\theta - 2u_i - u_{i+1} - u_{i-1} - 2l\beta_i \sec \theta \quad (32)$$

$$- (2 - \eta_i)s_i + s_{i+1} + s_{i-1} = 2v_i - v_{i+1} - v_{i-1} - 2l\gamma_i \cos \theta, \quad (33)$$

где $\xi_i = p_i l$, $\eta_i = q_i l$. В этих системах $i = 1, \dots, N$. Если $i = 1$, тогда $i - 1 = N$. Если же $i = N$, тогда $i + 1 = 1$.

7 Сравнительный анализ полученных результатов с известными данными

Как следует из вводной части статьи, сравнительный анализ полученных здесь результатов с известными данными, – а они приведены в работе [12], – можно провести только в рамках рассмотрения пустого N -зеркального резонатора ЛГ правильной формы.

В принятых здесь обозначениях результаты работы [12] (см. формулы (3), (12), (18), (20) в [12]) можно представить в виде

$$(2 - \xi_i)t_i + t_{i+1} + t_{i-1} = - (w_{i+1} - w_{i-1})tg\theta - 2u_i - u_{i+1} - u_{i-1} - 2l\beta_i \sec \theta \quad (34)$$

$$- (2 - \eta_i)s_i + s_{i+1} + s_{i-1} = 2v_i - v_{i+1} - v_{i-1} - 2l\gamma_i \cos \theta. \quad (35)$$

Сравнительный анализ систем уравнений (33) и (35), относящихся к сагиттальной плоскости, указывает на их полную идентичность. Анализ же систем уравнений (32) и (34), относящихся к осевой плоскости, указывает на одно единственное незначительное отличие между ними: слагаемые $(w_{i+1} - w_{i-1})tg\theta$ входят в правые части этих систем с разными знаками.

8 Заключение

Получена система $4N$ линейных алгебраических уравнений (29), из которой можно определить смещения t_i и s_i центра светового пятна гауссова пучка на поверхностях зеркал в плоском N -угольном разъюстированном резонаторе ЛГ, образованном сферическими зеркалами разных радиусов кривизны, участками пустого пространства и содержащим в плечах плоскопараллельные пластины.

Если резонатор ЛГ не содержит пластин в плечах и имеет произвольную форму, – тогда величины t_i и s_i можно найти из двух систем $2N$ уравнений (30) и (31).

Если же резонатор ЛГ не содержит пластин и имеет при этом правильную форму, – тогда величины t_i и s_i можно определить из двух систем N уравнений (32) и (33). Последние – с точностью до знака перед нормальными смещениями w_i зеркал – эквивалентны уже известным из работы [12] соотношениям.

Список использованной литературы

1. Савельев А.М., Соловьева Т.И. Состояние лазерной гироскопии за рубежом // Зарубежная радиоэлектроника. – 1981. – № 8. – С. 77–92.
Wilkinson J.R. Ring Lasers // Progr. Quant. Electr.–1987.–Vol.11.–P. 1–103.
2. Rodloff R. A Laser Gyro with Optimized Resonator Geometry // IEEE Journal of Quantum Electronics. – 1987. – Vol. QE-23, No. 4. – P. 438–445.
3. Siouris G.M. Aerospace Avionics Systems. A Modern Synthesis // Academic Press. San Diego, California. – 1993.
4. Ищенко Е.Ф. Анализ деформаций осевого контура оптического резонатора // Журнал прикладной спектроскопии. – 1969. – Т. 11, № 3. – С. 456–463.
5. Ищенко Е.Ф., Решетин Е.Ф. Метод осевого контура в изучении характеристик разъюстированных оптических резонаторов // Труды МЭИ. Темат. сб. "Физическая оптика". – 1975. – Вып. 222. – С. 99–102.
6. Ищенко Е.Ф., Решетин Е.Ф. Чувствительность к разъюстировке кольцевого оптического резонатора с фокусирующим элементом // Оптика и спектроскопия. – 1979. – Т. 46, № 2. – С. 366–375.
7. Ищенко Е.Ф., Решетин Е.Ф. Анализ чувствительности оптических резонаторов к разъюстировке методом лучевого контура // Журнал прикладной спектроскопии. – 1979. – Т. 30, № 3. – С. 440–445.
8. Ищенко Е.Ф. Открытые оптические резонаторы. – М.: Советское радио, 1980. – 208 с.
9. Ананьев Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки. – М.: Наука, 1990. – 264 с.
10. Быков В.П., Силичев О.О. Лазерные резонаторы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 320 с.
11. Bilger H.R., Stedman G.E. Stability of planar ring lasers with mirror misalignment // Applied Optics. – 1987. –Vol. 26, No. 17. – P. 3710–3716.
12. Бондаренко Е.А. Расчет оптических длин плеч разъюстированного кольцевого резонатора // Квантовая электроника. – 1992. – Т.19, № 2. – С. 171–174.
13. Бондаренко Е.А. Расчет оптических длин плеч разъюстированного резонатора лазерного гироскопа // Механіка гіроскопічних систем. Науково-технічний збірник. Вип. 19. Київ, 2008. – С. 133–145.
14. Бондаренко Е.А. Расчет смещений на поверхностях зеркал центра светового пятна гауссового пучка в разъюстированном резонаторе лазерного гироскопа // Труды IV Международной научно-технической

конференции “Гиротехнологии, навигация, управление движением и
конструирование авиационно-космической техники”. Киев, Украина.
21–23 апреля 2003 г. – С. 180–197.

Н.Г. Черняк, Э. Хазинедарлу

КАЛИБРОВКА НАВИГАЦИОННОГО МАЯТНИКОВОГО АКСЕЛЕРОМЕТРА МЕТОДОМ ТЕСТОВЫХ ПОВОРОТОВ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

Введение

Навигационные маятниковые акселерометры (МА), как базовые датчики первичной информации практически всех современных бесплатформенных инерциальных систем навигации (БИНС) и ориентации (БСО), в значительной степени определяют точность решаемых этими системами задач.

Применение МА в БИНС и БСО осуществляется на основе принятой для него метрологической модели (ММ). Под ММ МА понимают, представленные в виде функциональных зависимостей от измеряемой проекции кажущегося линейного ускорения и влияющих величин (ВВ), действующих на МА при проведении измерения, математическую модель выходного сигнала акселерометра (реальную функцию преобразования (ФП)) и математическую модель его погрешности (ММП).

Задача калибровки МА состоит в экспериментальном определении и паспортизации индивидуальных коэффициентов его ФП и ММП по результатам метрологических испытаний МА.

В литературе изучены отдельные вопросы построения ММ и калибровки навигационных МА. Наиболее полно эти задачи рассмотрены в работах [1, 2]. В [1], для определения коэффициентов ФП и ММП МА, предлагается калибровать акселерометр методом его тестовых поворотов в гравитационном поле Земли. В [2] рассмотрены подходы к калибровке трехосного блока МА данным методом. Однако, в работах приняты только линейные ФП и ММП МА, даны лишь общие рекомендации по алгоритму калибровки, не определены критерии выбора необходимого количества тестовых положений МА и не предъявлены требования к испытательному оборудованию.

Постановка задачи

Цель статьи – разработка достаточной для практического применения в БИНС и БСО нелинейной метрологической модели навигационного МА и методики его статической калибровки посредством тестовых поворотов в гравитационном поле Земли, обеспечивающей экспериментальное определение коэффициентов принятой ММ.

Метрологическая модель навигационного МА

Основываясь на требованиях к создаваемым в Украине БИНС и БСО, результатах их математического моделирования и экспериментальных исследований, примем, что достаточные для практического применения при решении измерительных задач в составе этих систем, действительная ФП навигационного МА и его ММП имеют вид:

– ФП в единицах выходного сигнала

$$Y_D = K_{0\Sigma} + K_1 a_i + K_2 a_i^2 + K_3 a_i^3 + M_o a_p + M_p a_o + M_{ip} a_i a_p, \quad (1)$$

– ММП в единицах измеряемого кажущегося линейного ускорения

$$\Delta a_i = \frac{Y_D - Y_{II}}{K_1} = k_{0\Sigma} + k_1 a_i + k_2 a_i^2 + k_3 a_i^3 + \delta_o a_p + \delta_p a_o + \delta_{ip} a_i a_p. \quad (2)$$

Здесь Y_D – действительная индивидуальная ФП акселерометра; $Y_{II} = K_{10} a_i$ – идеальная (без погрешностей) его линейная ФП, K_{10}, K_1 – идеальный и действительный коэффициент преобразования (КП) МА, a_i – измеряемая проекция кажущегося ускорения на измерительную ось (IA) акселерометра; a_o, a_p – неизмеряемые проекции кажущегося ускорения на его ось подвеса (OA) и ось маятника (PA) соответственно; $K_{0\Sigma}, k_{0\Sigma}$ – соответственно смещение нуля (СН) ФП и аддитивные погрешности смещения нуля; k_1 – мультипликативные погрешности КП; K_2, k_2, K_3, k_3 – систематические коэффициенты нелинейности ФП и ММП; $M_p, \delta_p, M_o, \delta_o$ – аддитивные систематические коэффициенты перекрестной чувствительности и погрешности базовой плоскости (как малые углы неортогональности оси IA относительно осей PA и OA соответственно); M_{ip}, δ_{ip} – мультипликативные систематические коэффициент перекрестной чувствительности и соответствующая ему погрешность.

Рассмотрим составляющие ММП (2) исходя из того, что навигационный МА обладает большим динамическим диапазоном $\approx 10^6 \dots 10^7$ и предназначен для измерения с заданной точностью (погрешностью) как очень малых ускорений (от $2 \dots 5 \cdot 10^{-5} g$), близких к его порогу чувствительности (начальное ориентирование БИНС, навигация при крейсирующем движении объекта, определение малых углов ориентации в БСО), так и больших ускорений (до $1 \dots 20 g$), близких к его верхнему пределу измерения (навигация при маневренном движении объекта, определение больших углов ориентации в БСО).

При этом будем считать систематическими все алгоритмически компенсируемые в составе БИНС и БСО погрешности, а случайными - некомпенсируемые алгоритмически погрешности

Погрешности смещения нуля МА $k_{0\Sigma}$ (рис. 1) определим следующим образом

$$k_{0\Sigma} = \hat{k}_0 \pm \overset{\circ}{k}_0(t) \pm \overset{\circ}{p} \pm \overset{\circ}{h},$$

где \hat{k}_0 – систематическое значение СН; $\overset{\circ}{k}_0(t)$ - случайная погрешность СН; $\overset{\circ}{h}$ (рис. 1,а), $\overset{\circ}{p}$ (рис. 1,б) – соответственно случайные погрешности СН от гистерезиса (в основном температурный гистерезис $\overset{\circ}{h}_T$, определяется узлом крепления ЧЭ и его упругим подвесом) и пороговой чувствительности (определяется уровнем шумов электроники в выходном сигнале акселерометра).

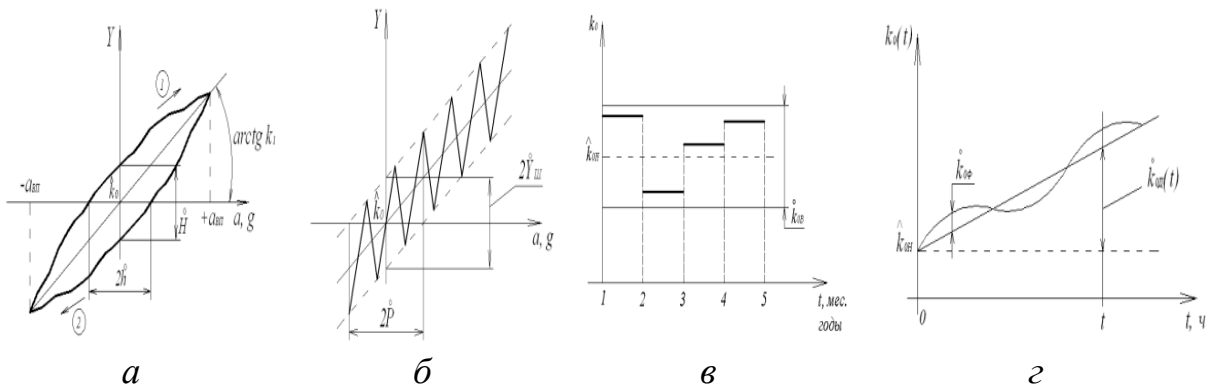


Рис. 1. Вид случайных погрешностей смещения нуля МА: $\overset{\circ}{h}$ (а); $\overset{\circ}{p}$ (б); $\overset{\circ}{k}_{0B}$ (в); $\overset{\circ}{k}_{0Д}(t)$, $\overset{\circ}{k}_{0Ф}(z)$

Систематическое значение СН паспортизируется с высокой точностью. В реальных условиях эксплуатации оно закономерно изменяется с изменением температуры окружающей акселерометр среды. Температурная зависимость систематического значения СН определяется выражениями:

$$\hat{k}_0(\Delta T) = \hat{k}_{0H} + \lambda_{T1} \Delta T, \text{ при } \Delta T \succ 0;$$

$$\hat{k}_0(\Delta T) = \hat{k}_{0H} + \lambda_{T2} \Delta T, \text{ при } \Delta T \prec 0,$$

где \hat{k}_{0H} – паспортизируемое систематическое значение смещения нуля при нормальных условиях (температура T_0 калибровки акселерометра); λ_{T1} , λ_{T2} – паспортизируемые температурные коэффициенты смещения нуля;

$\Delta T = T_{ТЕК} - T_0$ – изменение температуры, $T_{ТЕК}$ – текущая температура окружающей среды.

Как правило, наиболее существенными составляющими случайных погрешностей смещения нуля $\overset{\circ}{k}_0(t)$ являются невоспроизводимость СН от запуска к запуску $\overset{\circ}{k}_{0В}$ (рис. 1,б), его дрейф $\overset{\circ}{k}_{0Д}(t)$ (рис. 1,з) и низкочастотные флуктуации $\overset{\circ}{k}_{0Ф}$ (рис. 1,з) (отклонения от линии дрейфа) в запуске. Эти составляющие имеют слабую корреляцию, поэтому выражение, определяющее случайную погрешность смещения нуля, может быть записано в виде

$$\overset{\circ}{k}_0(t) \approx 0,5 \sqrt{\overset{\circ}{k}_{0В}^2 + \overset{\circ}{k}_{0Д}(t)^2 + \overset{\circ}{k}_{0Ф}^2}, \quad (3)$$

где $\overset{\circ}{k}_{0В} = \pm t_p \sigma_B$, $\overset{\circ}{k}_{0Ф} = \pm t_p \sigma_\Phi$, t_p – коэффициент Стьюдента, значение которого принимается в диапазоне от 2.7 до 3; σ_B, σ_Φ – соответственно среднеквадратические отклонения (СКО) невоспроизводимости СН от запуска к запуску и флуктуаций СН в запуске акселерометра; $\overset{\circ}{k}_{0Д}(t) = \overset{\circ}{\gamma}_Д t$, $\overset{\circ}{\gamma}_Д$ – коэффициент дрейфа смещения нуля, t – время.

Систематическое значение коэффициента преобразования МА паспортизируется с высокой точностью и в реальных условиях изменяется при изменении температуры окружающей акселерометр среды. Температурную модель систематической погрешности КП запишем в виде:

$$\hat{k}_{1Т}(\Delta T) = \beta_{Т1} \Delta T, \text{ при } \Delta T > 0;$$

$$\hat{k}_{1Т}(\Delta T) = \beta_{Т2} \Delta T, \text{ при } \Delta T < 0,$$

где $\beta_{Т1}, \beta_{Т2}$ – паспортизируемые температурные коэффициенты КП.

Случайную погрешность КП $\overset{\circ}{k}_1$ определим, как его нестабильность за межповерочный интервал времени, в виде

$$\overset{\circ}{k}_1 = \pm t_p \sigma_{КП},$$

где $\sigma_{КП}$ – СКО погрешности КП.

Систематические погрешности базовой плоскости δ_o, δ_p также зависят от изменения температуры окружающей акселерометр среды:

$$\delta_{o(p)}(\Delta T) = \delta_{o(p)H} + \gamma_{Т1} \Delta T, \text{ при } \Delta T > 0;$$

$$\delta_{o(p)}(\Delta T) = \delta_{o(p)H} + \gamma_{Т2} \Delta T, \text{ при } \Delta T < 0,$$

где $\delta_{o(P)H}$ – погрешность базовой плоскости в НУ; γ_{T1}, γ_{T2} – паспортные температурные коэффициенты погрешности БП.

Таким образом, удобная для практического применения математическая модель погрешности навигационного МА может быть представлена в виде

$$\Delta a_i(a_i, \Delta T, t) \approx \hat{k}_{0H} + \lambda_{T1(2)} \Delta T \pm (0,5 \sqrt{k_{0B}^2 + k_{0D}(t)^2 + k_{0\Phi}^2 + h_T + p}) + (\beta_{T1(2)} \Delta T \pm \pm k_1) a_i + k_2 a_i^2 + k_3 a_i^3 + (\delta_o + \gamma_{T1(2)} \Delta T) a_p + (\delta_p + \gamma_{T1(2)} \Delta T) a_o + \delta_{ip} a_i a_p, \quad (4)$$

Методика и результаты калибровки МА

Для экспериментального определения коэффициентов ФП (1) и ММП (4) навигационного МА проводится его статическая калибровка методом тестовых поворотов в гравитационном поле Земли на специальном стенде для метрологических испытаний навигационных акселерометров.

В состав стенда (рис. 2) входят следующее основное метрологическое оборудование: фундамент 1, развязанный от здания 2, с суточными колебаниями основания не более $\pm 1 \dots 2$ угл.сек; датчик ускорения 3 – оптическая делительная головка ОДГ-5Э (ОДГ), обеспечивающая погрешность задания ускорения методом тестовых поворотов не более $\pm 2 \cdot 10^{-5} g$; уровень пузырьковый для выставки установочной пластины вала ОДГ 4 в плоскость горизонта с погрешностью ± 2 угл.сек; термокамера 5 типа ТВТ-2, погрешность задания температуры во всем диапазоне рабочих температур $\pm 0.5^\circ C$, погрешность измерения заданной температуры $\pm 0.1^\circ C$; прецизионный многоканальный вольтметр 7 типа Agilent 34401A, класс точности вольтметра 0,003% от поддиапазона измерения.

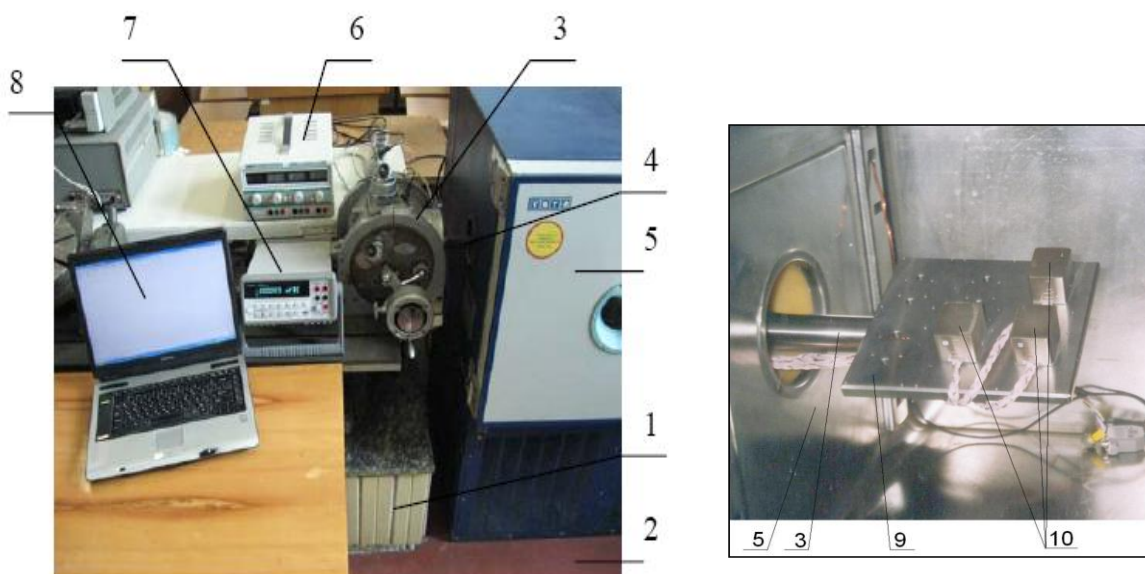


Рис. 2. Общий вид станда для калибровки МА

Калибровка акселерометра проводится в два этапа.

Сначала выполняется градуировка акселерометра методом тестовых поворотов в гравитационном поле Земли, по результатам которой оценивают все систематические коэффициенты ФП (1) и ММП (4), а также случайную погрешность СН от гистерезиса \dot{h} и случайную погрешность КП \dot{k}_1 .

После этого, в одном тестовом положении (ось IA акселерометра параллельна плоскости местного горизонта) проводятся длительные и короткие запуски МА. По результатам измерения выходного сигнала МА в этих запусках оценивают составляющие случайной погрешности СН (3) МА.

Методика градуировки МА предусматривает многократное высокоточное задание с помощью ОДГ 3 требуемых тестовых положений измерительной оси (ИО) IA акселерометра относительно плоскости местного горизонта (ПГ) и высокоточное измерение вольтметром 7 выходного сигнала калибруемого акселерометра 10 в этих тестовых положениях. Исходное приведение ИО акселерометра в положение перпендикулярное ПГ осуществляется посредством пузырькового уровня.

Проведенные исследования методики градуировки показали, что с увеличением количества тестовых положений значительно возрастают трудоемкость и время испытаний, а также влияние случайного временного дрейфа выходного сигнала МА на результаты определения искомым систематических коэффициентов его ФП (1) и ММП (4). Поэтому, наиболее целесообразным является использование 8-ми точечного теста, с трехкратным прохождением тестовых положений акселерометра относительно ПГ по прямому ходу (ПХ) и обратному ходу (ОХ), согласно

рис. 3. При этом задаваемые тестовые угловые положения ИО относительно ПГ определяются выражением $\phi_{j+1} = \phi_j + \Delta\phi$, где $\Delta\phi = 45^\circ$, $j=1, 2, \dots, 9$ – номер тестового положения согласно рис. 3.

Градуировка проводится, как минимум, при трех различных температурах (при нормальной температуре, а также при минимальной и максимальной температурах из диапазона его рабочих температур). В результате получают три таблицы выходных сигналов акселерометра Y_{jk}^T , где $j = 1, 2, \dots, 9$ – номер тестового положения; $k = 1, 2, \dots, 6$ – номер хода измерения (ПХ, ОХ) в трех циклах измерения (для ПХ $k = 1; 3; 5$, а для ОХ $k = 2; 4; 6$); T – значение температуры, при которой проводится градуировка.

Осредненные по $k = 1, 2, \dots, 6$ значения выходных сигналов акселерометра Y_j^T в тестовых положениях $j = 1, 2, \dots, 9$ связаны с величиной гравитационного ускорения в месте градуировки МА $g = 9,8106 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ выражениями:

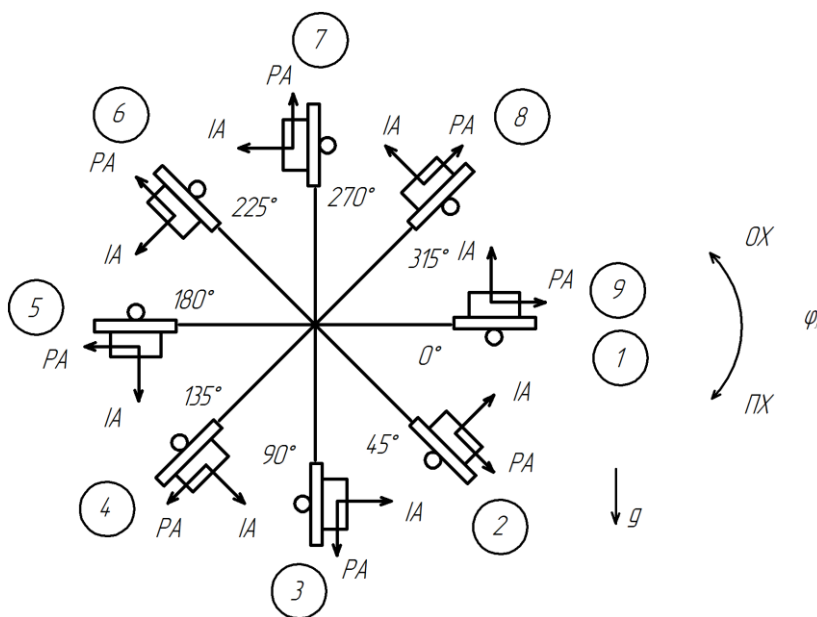


Рис. 3. Схема тестовых поворотов при градуировке МА

$$\begin{aligned}
Y_1 &= K_{0\Sigma} + K_1 g(1 - 0,5\delta_0^2) + K_2 g^2(1 - \delta_0^2) + K_3 g^3(1 - 1,5\delta_0^2) + M_{o(p)} g(\delta_0); \\
Y_2 &= K_{0\Sigma} + K_1 \frac{g}{\sqrt{2}}(1 - \delta_0) + K_2 \frac{g^2}{2}(1 - 2\delta_0) + K_3 \frac{g^3}{2\sqrt{2}}(1 - 3\delta_0) + \\
&+ M_{o(p)} \frac{g}{\sqrt{2}}(1 - \delta_0) + M_{ip} \frac{g}{2}(1 - \sqrt{2}\delta_0); \\
Y_3 &= K_{0\Sigma} - K_1 g\delta_0 + K_2 g^2\delta_0^2 - K_3 g^3\delta_0^3 + M_{o(p)} g(1 - 0,5\delta_0^2) - M_{ip} g\delta_0; \\
Y_4 &= K_{0\Sigma} - K_1 \frac{g}{\sqrt{2}}(1 + \delta_0) + K_2 \frac{g^2}{2}(1 + 2\delta_0) - K_3 \frac{g^3}{2\sqrt{2}}(1 + 3\delta_0) + \\
&+ M_{o(p)} \frac{g}{\sqrt{2}}(1 + \delta_0) + M_{ip} \frac{g}{2}(-1 - \sqrt{2}\delta_0); \\
Y_5 &= K_{0\Sigma} - K_1 g(1 - 0,5\delta_0^2) + K_2 g^2(1 - \delta_0^2) - K_3 g^3(1 - 1,5\delta_0^2) - M_{o(p)} g(\delta_0); \\
Y_6 &= K_{0\Sigma} - K_1 \frac{g}{\sqrt{2}}(1 - \delta_0) + K_2 \frac{g^2}{2}(1 - 2\delta_0) - K_3 \frac{g^3}{2\sqrt{2}}(1 - 3\delta_0) - \\
&- M_{o(p)} \frac{g}{\sqrt{2}}(1 - \delta_0) + M_{ip} \frac{g}{2}(1 + \sqrt{2}\delta_0); \\
Y_7 &= K_{0\Sigma} + K_1 g\delta_0 + K_2 g^2\delta_0^2 + K_3 g^3\delta_0^3 - M_{o(p)} g(1 - 0,5\delta_0^2) + M_{ip} g\delta_0; \\
Y_8 &= K_{0\Sigma} + K_1 \frac{g}{\sqrt{2}}(1 + \delta_0) + K_2 \frac{g^2}{2}(1 + 2\delta_0) + K_3 \frac{g^3}{2\sqrt{2}}(1 + 3\delta_0) - \\
&- M_{o(p)} \frac{g}{\sqrt{2}}(1 + \delta_0) + M_{ip} \frac{g}{2}(-1 + \sqrt{2}\delta_0).
\end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрев линейные комбинации выражений (5) получим формулы для оценки, по результатам градуировки, искомых коэффициентов ФП (1) и ММП (4):

$$\begin{aligned}
\hat{K}_1 &\approx K_1(1 - 0,5\delta_0^2) = \frac{1}{8g} \left[Y_1 + Y_9 - 2Y_5 - \sqrt{2}(Y_2 + Y_8 - Y_4 - Y_6) \right], \quad B_{yx} / g ; \\
\hat{K}_{0\Sigma} &= 0,5(Y_3 + Y_7), \quad B_{yx} ; \quad \hat{M}_{o(p)} = \frac{0,5}{g} (Y_7 - Y_3), \quad B_{yx} / g ; \\
\hat{K}_2 &= \frac{1}{2g^2} \left[Y_2 + Y_4 + Y_6 + Y_8 - 4\hat{K}_{0\Sigma} \right], \quad [B_{yx} / g^2]; \\
\hat{K}_3 &= \frac{\sqrt{2}}{g^3} \left[Y_2 + Y_6 - \sqrt{2}g\hat{K}_1 \right], \quad [B_{yx} / g^3]; \\
\hat{M}_{ip} &= \frac{1}{2g} (Y_2 + Y_6 - Y_4 - Y_8 + 2K_2 g\delta_0), \quad [B_{yx} / g^2];
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\hat{k}_{0\Sigma} = \hat{K}_{0\Sigma} \hat{K}_1^{-1}; \quad \hat{\delta}_{o(p)} = \hat{M}_{o(p)} \hat{K}_1^{-1}; \quad \hat{k}_2 = \hat{K}_2 \hat{K}_1^{-1}; \quad \hat{k}_3 = \hat{K}_3 \hat{K}_1^{-1};$$

$$\hat{\delta}_{ip} = \hat{M}_{ip} \hat{K}_1^{-1}.$$

Методика градуировки опробована при проведении калибровки разрабатываемого в Украине навигационного компенсационного МА типа АЛ-15 [3]. Акселерометр АЛ-15 предназначен для применения в БИНС ракеры-носителя “Циклон-4”.

На рис. 4 приведены типовые температурные зависимости $\hat{k}_0(\Delta T)$ и $K_1(\Delta T)$ МА АЛ-15 в диапазоне его рабочих температур. На рис. 4,а виден температурный гистерезис \hat{h}_T смещения нуля калибруемого акселерометра.

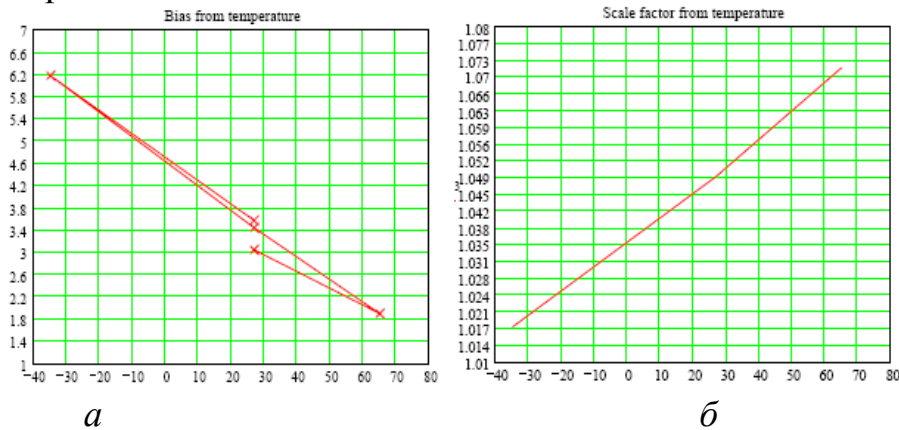


Рис. 4. Температурные зависимости $\hat{k}_0(\Delta T)$ (а) и $K_1(\Delta T)$ (б) МА

Полученные на основании формул (6) и рис. 4 числовые оценки коэффициентов модели погрешности конкретного образца МА АЛ-15 составляют:

$$\hat{k}_{0\Sigma} = 3,324 mg; \quad \hat{\delta}_0 = 1,15 mrad \approx \hat{\delta}_p; \quad \lambda_{T1} = -3,9 \cdot 10^{-5} g / ^\circ C; \quad \lambda_{T2} = -4,5 \cdot 10^{-5} g / ^\circ C;$$

$$\beta_{T1} = 520 ppt / ^\circ C; \quad \beta_{T2} = 480 ppt / ^\circ C; \quad \hat{h}_T \approx \hat{h}_T = \pm 3 \cdot 10^{-4} g (3\sigma).$$

Составляющие случайной погрешности смещения нуля $\hat{k}_0(t)$ (3) и пороговую чувствительность p определяют в тестовом положении №5 при нормальной температуре после выполнения рассмотренной выше градуировки МА.

Для определения невоспроизводимости СН от запуска к запуску \hat{k}_{0B} проводят последовательные запуски МА (не менее 5 запусков) через равные промежутки времени, при этом в каждом запуске регистрируют его

Гироскопичні системи

выходной сигнал (рис. 5,а) в течении требуемого времени готовности t_T МА (на рис. 5,а для МА АЛ-15 $t_T \approx 10$ мин.). Одновременно регистрируют выходной сигнал встроенного в МА датчика температуры (ТД) (рис. 5,б) с целью определения возможной зависимости между этими сигналами.

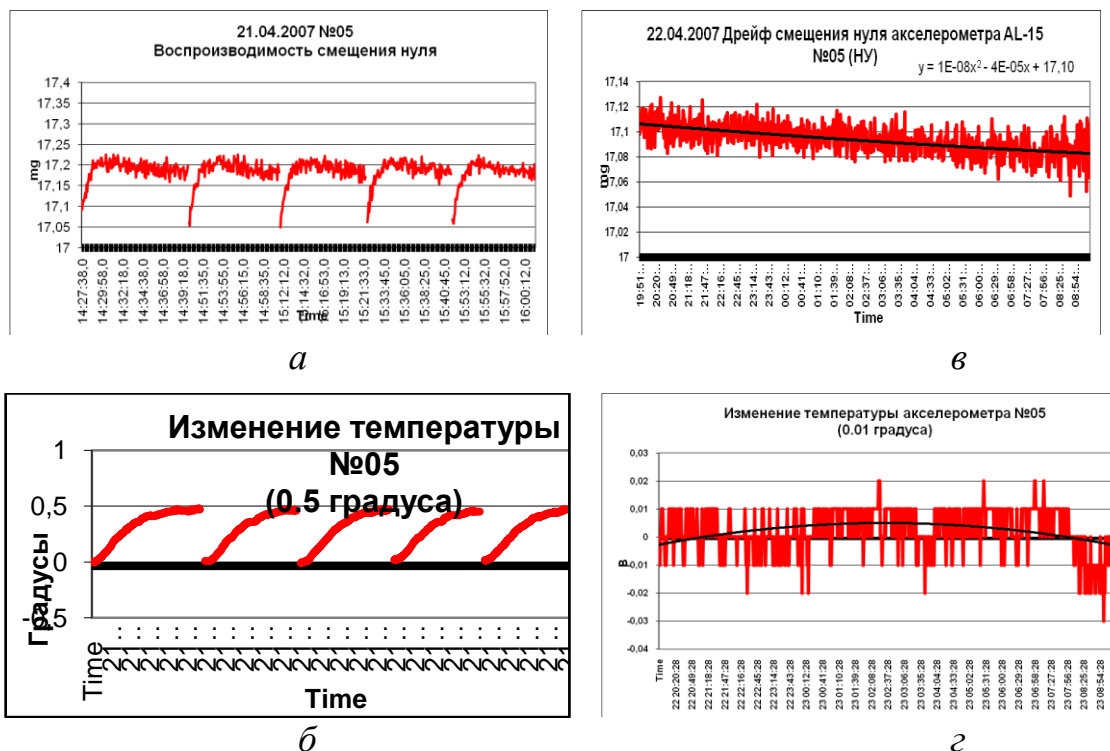


Рис. 5. Выходные сигналы МА (а, в) и ТД (б, з), используемые для оценки случайной погрешности СН $\overset{\circ}{k}_0(t)$

Оценка невоспроизводимости СН для акселерометра АЛ-15 составляет $(3\sigma) \overset{\circ}{k}_{0B} \approx \pm 2 \cdot 10^{-5} g$. При этом наблюдается существенная систематическая зависимость между выходными сигналами МА и встроенного в него ТД, что позволяет уменьшить время готовности МА за счет коррекции данной погрешности по выходному сигналу ТД.

Для определения дрейфа СН $\overset{\circ}{k}_{0D}(t)$ и низкочастотных флуктуаций СН $\overset{\circ}{k}_{0\Phi}$ в запуске проводят длительные запуски МА (как правило для навигационных акселерометров время запуска не менее 6...12 часов). При этом в каждом запуске непрерывно регистрируют выходные сигналы МА (рис. 5,в) и ТД (рис. 5,з). Оценка по графику рис. 5,в $\overset{\circ}{k}_{0D}(t)$ и $\overset{\circ}{k}_{0\Phi}$ для акселерометра АЛ-15 составляет $(3\sigma) \overset{\circ}{k}_{0D}(t) \approx \overset{\circ}{k}_{0\Phi} \leq \pm 2 \cdot 10^{-5} g$ за 12 ч.

Выводы

Выражения (1)...(4) составляют достаточную для практического применения в БИНС и БСО метрологическую модель навигационного МА.

Основанная на градуировочных формулах (6) и временных испытаниях акселерометра на дрейф и невоспроизводимость СН методика статической калибровки МА методом тестовых поворотов в гравитационном поле Земли обеспечивает оценку всех коэффициентов метрологической модели акселерометра при условии выполнения предъявленных в статье метрологических требований к стендовому оборудованию.

В дальнейшем целесообразно, на основе предложенных в статье подходов, разработать метрологическую модель и методику калибровки трехосного блока навигационных акселерометров.

Список использованной литературы

1. IEEE Standard Specification Format Guide and Test procedure for Linear, Single-Axis, Nongyroscopic Accelerometers / IEEE std 1293, 1998.
2. *Тарановский Г.О., Яковлев Е.А.* Калибровка трехканального измерителя ускорений в составе инерциальной навигационной системы // Материалы VIII конф. молодых ученых “Навигация и управление движением” – Спб.: ЦНИИ “Электроприбор”, 2006. – С.29-37.
3. *A.V. Zbrutsky, N.G. Chernyak, G.A. Skripkovskiy.* Creation of Low Cost Linear Accelerometers for Navigation and Control Systems // Symposium Gyro Technology. - Stuttgart, Germany, 2005. – P. 4.1 – 4.11.

УДК.539.3

С.И.Трубачев, О.Н.Алексейчук

РАСЧЕТ САНВИЧЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ, ПОДВЕРЖЕННЫХ СТАТИЧЕСКИМ И ДИНАМИЧЕСКИМ НАГРУЗКАМ

Введение

В настоящее время сэндвичевые пластины и оболочки являются широко распространенными конструктивными элементами. Такие конструкции состоят из двух тонких прочных облицовочных пластин – обшивок, толстой легкой сердцевины-заполнителя, разделяющего несущие пластины и распределяющего нагрузку между ними, и адгезионных слоев, связывающих пластины с заполнителями и передающих нагрузку от заполнителя к облицовкам и обратно. Практически для всех видов

гражданских самолетов и вертолетов, а также для военных летательных аппаратов и ракет используются сэндвичевые конструкции [1]. Эффективность различных сэндвичевых конструкций показана на рис. 1.

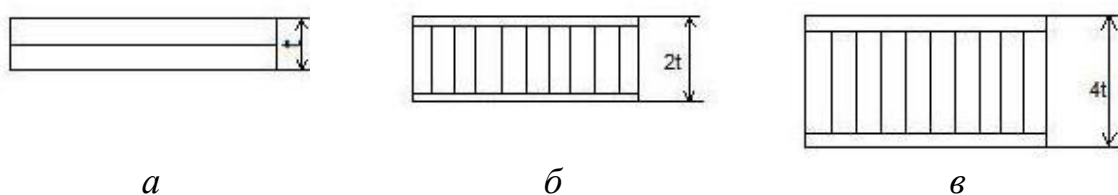


Рис. 1. Типы сэндвичевых конструкций

Например, для сэндвичевых конструкций различной толщины с алюминиевыми листами были получены следующие значения (для структуры 1/4 – 5052 с плотностью 37 кг/м^3 с облицовочной толщиной 2 мм) табл. 1 [1].

Таблица 1

Рис. 1	а	б	в
Изгибная жесткость D (кг/см)	1822	13933	71004
Объемная плотность ρ (кг/м ³)	29	30	31

Главными функциями несущих облицовочных материалов (для сэндвичевых конструкций) являются обеспечение их жесткости относительно изгиба и сдвига в плоскости пластин, а также передача нагрузок в той же плоскости. Зачастую возможность использовать тот или иной материал диктуется ценой на него и конструкционные разработки могут меняться в зависимости от стоимости исходных материалов. Основной функцией заполнителя является придание устойчивости несущим поверхностям и обеспечение передачи сдвиговых нагрузок по толщине композита. Для выполнения этой задачи заполнитель должен быть по возможности более жестким и легким, не должен изменять свойства при воздействии окружающей среды, особенно после специальной обработки.

В качестве заполнителя широко применяются различные виды пенопластов, сотовые заполнители на основе алюминия, стеклопластиковые сотовые структуры.

В процессе эксплуатации сэндвичевые конструкции подвергаются воздействию статических и вибрационных нагрузок, поэтому задача их расчета является весьма актуальной. В настоящее время для расчета сэндвичевых конструкций используются аналитические и численные методы [2,3]. Аналитические методы, несмотря на их распространенность, не всегда эффективны. Это связано с тем, что на практике сэндвичевые конструкции имеют довольно сложные условия закрепления и нагружения.

Среди численных методов наиболее широкую распространенность получил метод конечных элементов [3]. Следует отметить, что применение метода конечных элементов связано с некоторыми трудностями, возникающими при реализации метода на ПЭВМ, среди которых основными являются формирование и хранение плотноупакованных матриц жесткости и масс. Чем выше порядок матрицы, тем хуже она обусловлена, что ведет к увеличению погрешностей при решении систем алгебраических уравнений [4]. Также возникает задача с выбором конечного элемента, который отвечает всем необходимым требованиям.

В настоящей работе предложена методика расчета сандвичевых конструкций, позволяющая избежать указанных трудностей. Методика основана на вариационно-сеточном подходе формирования необходимых функционалов и минимизации их методом покоординатного спуска [4].

Постановка задачи

Рассмотрим сандвичевую конструкцию, срединная поверхность которой занимает области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Задача определения напряженно-деформированного состояния в вариационной формулировке на основе минимума потенциальной энергии может быть сформулирована как задача минимизации квадратичного функционала:

$$u \in V, \quad \mathcal{E}(u) = \inf_{v \in V} \mathcal{E}(v); \quad v \in V, \quad (1)$$

где V – пространство допустимых перемещений. Элементы, принадлежащие пространству V , удовлетворяют кинематическим граничным условиям задачи и требованиям гладкости искомого решения. Функция $\mathcal{E}(v)$ представляет потенциальную энергию системы

$$\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - f(v), \quad (2)$$

где $a(v, v)$ – симметричная билинейная форма. С энергетической точки зрения $\frac{1}{2} a(v, v)$ определяет потенциальную энергию упругой деформации конструкции, $f(v)$ – работа внешних сил.

При расчете напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, подверженных действию вибрационных нагрузок, возникает необходимость определения собственных частот и соответствующих им форм колебаний. Нахождение основной собственной частоты может быть сведено к задаче минимизации, где функционал определяется отношением Релея-Ритца, т.е.

$$\omega^2 = \min_{v \in V} \frac{\Pi(v)}{T(v)}, \quad v \in V \quad (3)$$

Здесь $\Pi(v)$ – амплитудное значение потенциальной энергии деформации, $T(v)$ – величина, пропорциональная с множителем ω^2 амплитудному значению кинетической энергии.

Вариационно-сеточный метод определения напряженно-деформированного состояния

Рассмотрим построение вариационно–сеточной схемы для сэндвичевых конструкций с различными видами заполнителей, который легко обобщается на случай слоистых систем с количеством чередующихся жестких слоев и заполнителей свыше трех. Предполагается, что деформированное состояние в тонких несущих слоях удовлетворяет гипотезам Кирхгофа – Лява. Для заполнителя принимается нелинейное распределение перемещений по толщине, которое представляем в виде ряда. Эти движения достаточно точно отражают процесс деформирования сэндвичевых конструкций по сравнению с гипотезами Кирхгофа – Лява и Тимошенко для пакета в целом.

В верхнем несущем слое:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}h_3 \leq z \leq \frac{1}{2}h_3 + h; \\ u = u_1 - (z - \frac{1}{2}(h_3 + h))w_{1x}; \\ v = v_1 - (z - \frac{1}{2}(h_3 + h))w_{1y}. \end{aligned} \quad (4)$$

В нижнем несущем слое:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}h_3 - h \leq z \leq -\frac{1}{2}h_3; \\ u = u_2 - (z + \frac{1}{2}(h_3 + h))w_{2x}; \\ v = v_2 - (z + \frac{1}{2}(h_3 + h))w_{2y}. \end{aligned} \quad (5)$$

В заполнителе:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}h_3 \leq z \leq \frac{1}{2}h_3; \\ u = u_3 + \sum_{j=1}^n \tilde{u}_j z^j; \\ v = v_3 + \sum_{j=1}^n \tilde{v}_j z^j; \\ w = w_3 + \sum_{j=1}^n \tilde{w}_j z^j, \end{aligned} \quad (6)$$

где $u_j, v_j, w_j, j = 1, 2, 3$ – соответственно перемещения точек срединных поверхностей слоев сэндвичевой конструкции вдоль осей x, y, z ; $h_i, i = 1, 2, 3$ – толщины слоев, индексы x и y указывают на дифференцирование

по соответствующей переменной. Напряжения в слоях определяются согласно закона Гука:

$$\{\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\} = [G^{(n)}]\{\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}\}, n = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Здесь $\{\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\}$ – компоненты тензора напряжений в слоях, $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}\}$ – компоненты тензора деформаций в слоях, $[G^{(n)}]$ – матрица упругих коэффициентов.

При построении вариационно–сеточных схем для сандвичевых конструкций используется слоистый треугольный элемент, в котором в отличие от ранее разработанных моделей [1,3,5] применяется аппроксимация перемещений, различная по слоям. Для аппроксимации прогибов тонких несущих слоев в пределах каждого треугольника используется неполный кубический полином:

$$w_i = \sum_{k=1}^n w_{ik}L_k + \alpha_{i1}L_1^2L_2 + \alpha_{i2}L_1^2L_3 + \alpha_{i3}L_2^2L_1 + \alpha_{i4}L_2^2L_3 + \alpha_{i5}L_3^2L_1 + \alpha_{i6}L_3^2L_2 + 2\alpha_{i7}L_1L_2L_3, (i=1,2) \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{i1} &= w_{i1} - w_{i2} - b_3\varphi_{i1} - c_3\psi_{i1}, & \alpha_{i2} &= w_{i1} - w_{i3} + b_3\varphi_{i1} + c_2\psi_{i1}, \\ \alpha_{i3} &= w_{i2} - w_{i1} + b_3\varphi_{i2} + c_3\psi_{i2}, & \alpha_{i4} &= w_{i2} - w_{i3} - b_1\varphi_{i2} - c_1\psi_{i2}, \\ \alpha_{i5} &= w_{i3} - w_{i1} - b_2\varphi_{i3} - c_2\psi_{i3}, & \alpha_{i6} &= w_{i3} - w_{i2} + b_1\varphi_{i3} + c_1\psi_{i3}, \\ \alpha_{i7} &= \frac{1}{4} \sum_{s=1}^6 \alpha_{is}, \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $L_k, k=1,2,3$ - линейная интерполяционная функция треугольника, определяется с помощью соотношений:

$$L_k = \frac{1}{2S} (\alpha_j + b_j x + c_j y) \quad (10)$$

$$\text{где } \alpha_1 = x_2y_3 - y_2x_3; b_1 = y_2 - y_3; c_1 = x_3 - x_2 \quad (11)$$

Остальные коэффициенты получаются с помощью циклической перестановки индексов. Величина S равна площади треугольного конечного элемента

$$S = \frac{1}{2} (b_2 c_3 - b_3 c_2) \quad (12)$$

В выражениях (8), (9) $\varphi_{ij} = (\frac{\partial w_i}{\partial y})_j$; $\psi_{ij} = (\frac{\partial w_i}{\partial x})_j$ – углы поворота нормали в j -том узле соответственно вокруг осей x и y для i -го несущего слоя.

Перемещение точек срединных плоскостей несущих слоев вдоль осей x и y и неизвестные функции \tilde{u}_j , \tilde{v}_j , \tilde{w}_j задаются в виде линейных полиномов в пределах каждого треугольника. Перемещения точек срединной плоскости заполнителя u_3 , v_3 , w_3 легко выражаются через перемещения срединных поверхностей несущих слоев, исходя из условий работы сэндвичевой конструкции без отрыва и проскальзывания между слоями. Построенные конечноэлементные аппроксимации обеспечивают непрерывность перемещений во всей области Ω , а также удовлетворяют всем требованиям сходимости.

Применяя принятые аппроксимации перемещений, функционалы потенциальной энергии системы (2), (3) на конечномерном пространстве допустимых функций V_h имеют вид:

$$\mathcal{E}(v_h) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(v_h, v_h) - f(v_h), v_h \in V_h \quad (13)$$

$$F(v_h) = \frac{P(v_h)}{T(v_h)}; v_h \in V \quad (14)$$

Для минимизации функционалов (13), (14) предлагается использовать метод покоординатного спуска (МПС) [4]. Выбор данного метода обусловлен тем, что при его применении нет необходимости в формировании и хранении матриц масс и жесткостей больших размерностей, нумерация узлов при дискретизации области произвольна, это значительно уменьшает потребности в памяти ПК. Метод покоординатного спуска является итерационным устойчивым методом, и ошибки округления мало влияют на точность окончательного результата. В методе покоординатного спуска $k+1$ приближение строится в виде

$$\vec{v}^{k+1} = \vec{v}^k + \beta^{k+1} \lambda_i^{k+1} \vec{e}_i, \quad (15)$$

где \vec{v} – вектор искомых перемещений; \vec{e}_i – единичный вектор в направлении компоненты \vec{v}_i^k ; λ_i^{k+1} – шаг; β – ускоряющий параметр итерационного процесса, который определяется как [4]:

$$\beta^{k+1} = 1 + \|\vec{\lambda}^{k+1}\| / \|\vec{\lambda}^k\| \quad (16)$$

Величину шага находим из условия максимума уменьшения функционалов (13), (14).

В качестве критерия останова итерационного процесса принимаем условие

$$\|\vec{\lambda}_i^{k+1}\| \leq \varepsilon \|\vec{v}_i^k\|, \quad (17)$$

где $\|\vec{\lambda}^{k+1}\|$, $\|\vec{v}_i^k\|$ – нормы векторов приращений перемещений на k -ой итерации. Величина $\varepsilon > 0$ представляет собой наперед заданное число, которое выбирается так, чтобы погрешность итерационного процесса была приблизительно равна погрешности аппроксимации перемещений. В качестве тестовых решаем задачи изгиба и собственных колебаний

сандвичевых панелей квадратной, трапециидальной и прямоугольной форм с различными условиями закрепления. Результаты расчета сравнивались с результатами, полученными на основе экспериментальных, численных и аналитических методов [2, 3]. Максимальное количество треугольных элементов в задачах составило не более 1000. Максимальное количество итераций составило не более 50. Погрешность в определении прогибов в центре пластин не более 0,2%. Данные по определению основных собственных частот сравнивались с результатами, полученными асимптотическим методом В. В. Болотина. После 120 итераций максимальная погрешность в определении основной собственной частоты колебаний составила 4,3%.

Выводы

В заключение отметим следующие положительные стороны предлагаемого подхода. В рассматриваемом треугольном элементе слоистой структуры использование различных аппроксимаций перемещений несущих слоев и заполнителя позволяет моделировать различные виды закрепления и соединения сандвичевых конструкций. Так один слой может быть свободно закреплен, а другой жестко закреплен; в одном слое может быть болтовое соединение, а в другом нет и т.п. Кроме того, благодаря применению указанных аппроксимаций перемещений, удалось снизить порядок элемента по сравнению с другими конечноэлементными моделями [5, 6].

Вследствие того, что при использовании метода покоординатного спуска нет необходимости в формировании и хранении матриц жесткости и масс, нумерация узлов при дискретизации области произвольна, что значительно уменьшает потребности в памяти ЭВМ. Поскольку метод покоординатного спуска является итерационным алгоритмом, ошибки округления оказывают малое влияние на точность окончательного результата.

Список использованной литературы

1. Справочник по композиционным материалам: Т.2.-М.: Машиностроение, 1988. – 584с
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. –К.: Наук. Думка, 1981.- Т.4. – 543с
3. Пискунов В.Г., Вериженко В.Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. – К.: Будівельник, 1986. – 176с

4. *Бабенко А.Е.* Застосування і розвиток метода по координатного спуску в задачах визначення напружено-деформованого стану при статичних та вібраційних навантаженнях. - К.: КПІ, 1996. – 96с
5. *Бартелдс Г., Оттенс Х.* Расчет слоистых панелей на основе МКЭ // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. – Л. Судостроение, 1984. – Т1. –с 254-272
6. *Аргирис Дж., Шариф Д.* Теория расчета пластин и оболочек с учетом деформации поперечного сдвига // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. – Л. Судостроение, 1984. – Т1. –с 179-210.

УДК: 681.3+ 615.89

О. М. Мелашенко, Л. М. Рыжков

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ МИКРОСПУТНИКА С ЛИНЕЙНЫМ ФИЛЬТРОМ КАЛМАНА

Вступ

Алгоритми зворотного зв'язку сучасних магнітних систем орієнтації та стабілізації (СОС) мікросупутників (МС) здебільшого синтезуються методами простору станів. Необхідною передумовою застосування цих методів є доступність для керування повного фазового вектора МС. Задача отримання оцінки цього вектора на об'єкті МС за сигналами позиційних датчиків розв'язується на основі алгоритму фільтра Калмана.

В переважній більшості праць розглядається алгоритм узагальненого фільтра Калмана, на основі якого вдається оцінювати фазовий вектор МС за будь-якої його орієнтації. Але за таку можливість оцінювати орієнтацію доводиться розплачуватися значним ускладненням алгоритму фільтрації. З іншого боку, виглядає доцільним за рахунок звуження задачі, а саме, розглядаючи задачу стабілізації орієнтації МС в заданій (здебільшого орбітальній) системі координат, домогтися спрощення процедури оцінювання фазового вектора МС.

Очевидно, що спрощення алгоритму фільтрації призведе до погіршення точності оцінювання фазового вектора МС. Але таке зниження точності може бути цілком виправданим спрощенням технічної реалізації

магнітної СОС і вивільненням обчислювальних потужностей бортової ЕОМ.

Постановка задачі

Розглядається задача отримання алгоритму лінійного фільтра Калмана для оцінювання фазового вектора мікросупутника за припущення про роботу магнітної СОС в номінальному режимі. Виконується аналіз точності магнітної СОС з лінійним фільтром Калмана та осередненим лінійно-квадратичним регулятором.

Дослідження рівнянь руху МС

Ввівши вектор стану $\mathbf{x} = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3^T$ і вектор моменту керування $\boldsymbol{\mu} = \mu_x, \mu_y, \mu_z^T$, лінеаризовані рівняння руху, згідно [1], запишемо у формі

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\boldsymbol{\tau}_d^B(t) + \mathbf{B}_u(t)\boldsymbol{\mu}^B(t), \quad (1)$$

де $\boldsymbol{\tau}_d^B$ – момент збурення; \mathbf{B}^O – вектор індукції магнітного поля Землі, виражений в орбітальній системі координат; $k_x = I_x - I_z / I_x$, $k_y = I_x - I_z / I_y$, $k_z = I_y - I_x / I_z$;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4k_x\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-k_x\omega_0 \\ 0 & -3k_y\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_z\omega_0^2 & -1-k_z\omega_0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \frac{\bar{\mathbf{J}}^{-1}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_d^B, \quad \mathbf{B}_u = \frac{\bar{\mathbf{J}}^{-1}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_z^O & -B_y^O \\ -B_z^O & 0 & B_x^O \\ B_y^O & -B_x^O & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu},$$

$$\bar{\mathbf{J}}^{-1} = \text{diag } 0, 0, 0, I_x^{-1}, I_y^{-1}, I_z^{-1}.$$

Вважатимемо, що на об'єкт встановлено два позиційних датчики – тривісний магнітометр і датчик Сонця, вихідні сигнали яких пропорційні проекціям на осі зв'язаної системи координат векторів відповідно індукції магнітного поля Землі і напрямку на Сонце, виражених в орбітальній системі координат. Тобто, можемо записати:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^B(t) &= R_O^B \mathbf{B}^O(t), \\ \mathbf{S}^B(t) &= R_O^B \mathbf{S}^O(t), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\mathbf{S}^O(t)$ – вектор напрямку на Сонце, виражений в орбітальній системі координат.

Матриця напрямних косинусів R_O^B переходу з орбітальної системи координат в зв'язану систему координат за малих кутових переміщень може бути записана як $R_O^B = I - 2[\epsilon \times]$, де $[\epsilon \times]$ – косиметрична матриця.

Тепер, ввівши вектор вимірювань

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^B(t) - R_O^B \mathbf{B}^O(t) \\ \mathbf{S}^B(t) - R_O^B \mathbf{S}^O(t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

можемо записати модель вимірювань для системи (3) у вигляді:

$$\mathbf{y} = H \mathbf{x}, \quad (4)$$

де

$$H = 2 \left[\begin{array}{c|c} \left[\mathbf{B}^O(t) \times \right] & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hline \left[\mathbf{S}^O(t) \times \right] & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{array} \right]. \quad (5)$$

Отже, маючи рівняння динаміки (1) і рівняння вимірювань (5), алгоритм лінійного фільтра Калмана можемо записати у вигляді [2]

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{n+1|n} &= \Phi \hat{\mathbf{x}}_{n|n} + \Gamma_n \boldsymbol{\mu}_n^B, \\ P_{n+1|n} &= \Phi P_{n|n} \Phi^T + Q, \\ K &= P_{n+1|n} H_{n+1|n}^T \left(H_{n+1|n} P_{n+1|n} H_{n+1|n}^T + R \right)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_{n+1|n+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{n+1|n} + K \mathbf{y}_n - H_{n+1|n} \hat{\mathbf{x}}_{n+1|n}, \\ P_{n+1|n+1} &= P_{n+1|n} - K H_{n+1|n} P_{n+1|n}. \end{aligned} \quad (6)$$

де $\Phi = I + A T_s + \frac{A^2 T_s^2}{2}$, $\Gamma_n T_s = T_s \left(I + \frac{A T_s}{2} \right) B_u T_s$, T_s – період дискретизації.

Таким чином, маючи оцінку повного фазового вектора МС згідно алгоритму (6), ми можемо згідно [1] сформулювати закон зворотного зв'язку магнітної СОС у вигляді:

$$\mu_n^B = -L \mathbf{x}_n \quad (7)$$

де $L = [\bar{\Gamma}^T P \bar{\Gamma} + R]^{-1} \bar{\Gamma}^T P \Phi$.

Матриця P є розв'язком алгебричного рівняння Ріккати

$$\Phi^T P \Phi - P - \Phi^T P \bar{\Gamma} [\bar{\Gamma}^T P \bar{\Gamma} + R]^{-1} \bar{\Gamma}^T P \Phi + Q = 0,$$

де Q і R – вагові матриці відповідно керованої величини і сигналу керування в квадратичному критерії якості; $\bar{\Gamma} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \Gamma_n$, $N = T/T_s$, T – період часу, на якому виконується осереднення.

Аналіз точності магнітної системи стабілізації МС з лінійним фільтром Калмана виконаємо через дослідження перехідних та усталених процесів які виникають в цій системі. В якості об'єкта керування візьмемо МС, який рухається по коловій орбіті на висоті 650 км з нахилом орбіти рівним 98° і тензором інерції – $J = \text{diag } 1,44 \ 1,48 \ 0,76$ [кг·м²]. Вагові матриці осередненого регулятора взято у вигляді: $R = \text{diag } 10^5, 10^6, 10^3$,

$Q = \left(\frac{10\pi}{180}\right)^{-2} \cdot \mathbf{1}_{6 \times 6}$. Коваріаційні матриці фільтра Калмана взято у вигляді:

$R = 10^{-2} \cdot \mathbf{1}_{6 \times 6}$, $Q = 10^{-1} \cdot \mathbf{1}_{6 \times 6}$. Період дискретизації T_s вибрано рівним 1 сек. В якості моделі МПЗ вибрано модель WMM2005 [3].

На рис. 1 показано графіки моментів збурення, які діють на супутник, викликаних сонячним вітром та залишковою атмосферою.

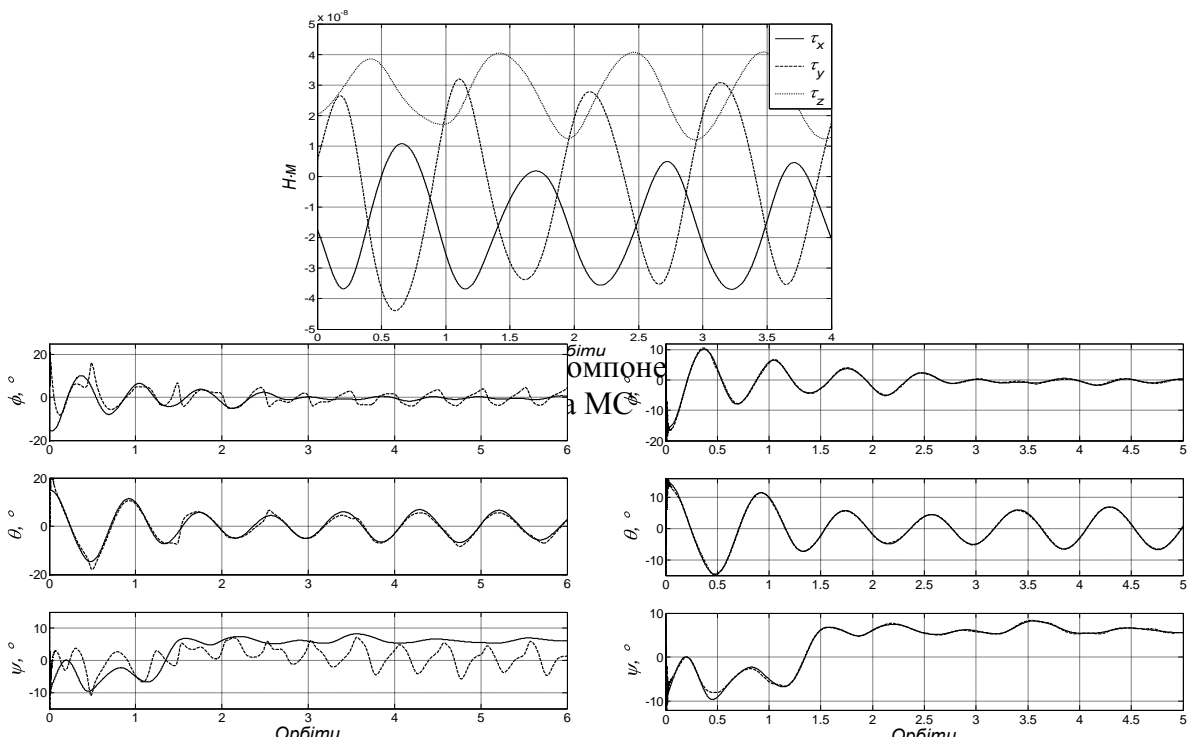


Рис. 2. Графіки руху МС при дії збурення – тільки магнітометр

Рис. 3. Графіки руху МС при дії збурення – магнітометр і датчик Сонця

За вказаних вихідних даних на рис. 2 та рис. 3 побудовано графіки руху МС по трьом кутам, який виникає за початкових умов: $\omega_{OB}^B = \mathbf{0}$, $\phi, \theta, \psi = -15^\circ, 15^\circ, -10^\circ$. Суцільні криві на цих рисунках відповідають процесам в магнітній СОС, в якій зворотній зв'язок будується на основі істинного фазового вектора \mathbf{x}_n , тоді як пунктирні криві на рис. 2 відповідають оцінці відповідних кутів лінійним фільтром Калмана тільки за сигналами з магнітометра, а на рис. 3 – за сигналами з магнітометра і датчика Сонця.

Бачимо, що синтезований регулятор за вказаного рівня збурення і за доступності для керування повного фазового вектора забезпечує точність стабілізації МС близько 3° за кутами крену та тангажу, і близько 5° за кутом нicanня. З цих графіків також видно, що оцінювання фазового вектора лише за сигналами магнітометра зумовлює похибки оцінювання до 6° , тоді як використання сигналів і магнітометра і датчика Сонця дозволяє значно підвищити точність оцінювання.

На рис. 4 побудовано графіки руху МС за початкових умов і моменту збурення, вказаних вище, але зворотній зв'язок магнітної СОС в цьому випадку будується за оцінкою $\hat{\mathbf{x}}_n$ фазового вектора МС. На цьому рисунку суцільні криві відповідають процесам в магнітній СОС, в якій оцінку фазового вектора отримано за сигналами і магнітометра і датчика Сонця, тоді як пунктирні криві відповідають процесам, отриманим при використанні в алгоритмі фільтра Калмана тільки сигналів магнітометра.

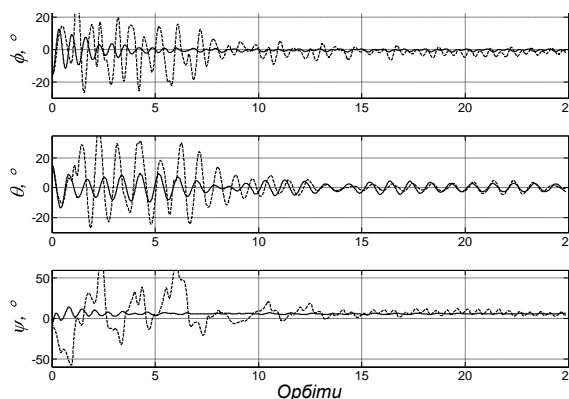


Рис. 4. Графіки руху МС при дії збурення – замикання за оцінкою фазового вектора

Як видно з рис. 4, перехідний процес в магнітній СОС МС, побудованій на основі лінійного фільтра Калмана і використанні тільки сигналів магнітометра закінчується за 10 орбітальних витків, а усталена похибка стабілізації становить близько 4° за кутами крену та тангажу, і близько 10° за кутом нicanня. Крім того, з цього рисунка також видно, що застосування для оцінювання лінійним фільтром Калмана фазового вектора МС сигналів датчика Сонця та магнітометра дозволяє досягнути

точності стабілізації орієнтації МС порядку 3° за кутами крену та тангажу, і близько 6° за кутом никання.

Висновки

Побудова магнітної системи стабілізації орієнтації МС на основі лінійного фільтра Калмана дозволяє суттєво спростити технічну реалізацію такої системи і разом з тим, при доступності на об'єкті датчиків Сонця і магнітного поля Землі, дозволяє зберегти високу точність стабілізації орієнтації МС. Магнітна система стабілізації орієнтації не втрачає працездатності при роботі тільки за сигналами магнітометра, при цьому досягається точність стабілізації порядку 4° за кутами крену та тангажу, і близько 10° за кутом никання.

Напрямок подальших досліджень може бути розробка алгоритму лінійного фільтра Калмана з розширеним фазовим вектором для оцінювання моменту збурення, який діє на МС.

Список використаної літератури

1. Мелащенко О.М., Рижков Л.М. Дослідження гравітаційно-магнітної системи стабілізації мікросупутника з оцінюванням фазового вектора фільтром Калмана // Наукові вісті НТУУ "КПІ", 2008, № 2, с.61-67.
2. M.S. Grewal, A.P. Andrews. Kalman Filtering. Theory and Practice Using MATLAB. – Wiley, New York, 2001. – 401 p.
3. <http://www.ngdc.noaa.gov/seg/WMM/DoDWMM.shtml>.

УДК 531.383.

Е. С. Щербина

ОБ УПРАВЛЯЕМЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введение и постановка задачи

Всюду ниже рассматриваются автономные динамические системы. Под автономной динамической системой понимается гладкое векторное поле X на C^r – гладком многообразии $M \subseteq \mathbb{R}^n$ такое, что, по крайней

мере, локально, имеют место дифференциальные уравнения в следующей задаче Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x), \\ x(0) &= x_0, \\ x &\in M \subseteq R^n \end{aligned} \quad (1)$$

Решение задачи Коши (1) определяют на многообразии M интегральные кривые $\gamma(t) = (x_i(t))_{i=1}^n$, а вектор-функция $\gamma(t)$ совпадает в каждый момент времени t с $X(\gamma(t))$.

В дальнейшем полагаем многообразие M компактным. Из этого предположения следует, что каждая траектория может быть неограниченно продолжена по времени t и существует для всех t из интервала $-\infty < t < +\infty$. Векторное поле X определяет оператор дифференцирования функций f по направлению X таким образом, что

$$f \rightarrow \partial_x f(x) = X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i \in 1, n,$$

причем экспонента от оператора

$$\exp t \partial_x = \sum_{k>0} \frac{1}{k!} t^k \partial_x^k$$

определяет сдвиг функций вдоль интегральных кривых поля X .

Вообще говоря, векторное поле X может также зависеть от некоторого числа параметров λ или функций, характеризующих особенности модели физической системы, и могут быть заведомо выбраны или изменены целенаправленно или произвольно в процессе функционирования системы [1]. Конкретный вид зависимости векторного поля X от управляющих воздействий ниже не является принципиальным и поэтому не отражен в задаче (1). Следует отметить, что факт существования такой зависимости обычно связывается с описанием динамической системы с управлением не одним векторным полем, а семейством векторных полей с фиксированными значениями управляющих воздействий и определенными алгебраическими и дифференциально-топологическими структурами [2, 3]. Под управляемыми структурами всюду ниже понимаются дифференциально-топологические и алгебраические свойства векторных полей, порождающих систему, интегральные многообразия, множества управляемых и достижимых состояний и прочее.

Основная задача ниже заключается в описании и исследовании топологии множества достижимых состояний динамических систем с управлением в пространстве конфигураций.

Проблема изучения множеств управляемых и достижимых состояний динамических систем и их топологических свойств до настоящего времени является не достаточно исследованной. Если даже представляется возможным установить по одному из многочисленных критериев существование или отсутствие у конкретной системы свойства управляемости или достижимости, то воспользоваться этими же критериями для конструктивного описания множеств достижимости и управляемости оказывается невозможными. Важность алгебраического и дифференциально–топологического описания этих множеств индуцируется прежде всего существованием для нелинейных динамических систем критериев управляемости, носящих характер только достаточных условий [4, 5], не говоря уже о важности информации о структурах множеств управляемости при решении задач синтеза законов управления даже при условии полной управляемости динамической системы. Если система не вполне управляема, т. е. множество достижимости есть подмногообразие в фазовом пространстве, то такая информация является принципиально необходимой уже на этапе построения управляемой модели физического процесса. Здесь сразу следует отметить, что сравнительно успешные результаты получены для динамических систем на плоскости, но в общем случае произвольной размерности конструктивные результаты отсутствуют. Так, например, не ясно при каких условиях множество достижимых состояний является многообразием с краем, какие особенности имеет граница множества достижимости. Для систем на плоскости особенности границ множеств достижимости исследовались, например, в [6, 7].

Ставится задача при исследовании множеств достижимости системы использовать не сами уравнения (1), а на основании этих уравнений построить модельное уравнение, описывающее эволюцию множества одновременной достижимости по траекториям этой системы, установить при каких условиях решения модельного эволюционного уравнения будет топологически эквивалентным множеству достижимых состояний исходного уравнения, построить алгоритм точного или асимптотического решения задачи. Изложенное ниже базируется на методе канонического оператора В. Я. Маслова [8].

1. Выбор модельного уравнения

Пусть в качестве модельного уравнения выступает уравнение типа Гамильтона–Якоби, а именно:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0, \quad (2)$$

где $S(x, t)$ – функция действия, $p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$ – обобщенный импульс,

Г и р о с к о п и ч н и с и с т е м и

x_i - обобщенная координата, H - функция Гамильтона, определяемая как C^v - гладкое отображение $H: R^{2n} \rightarrow R^1$ на фазовом пространстве R^{2n} .

Функция H удовлетворяет условию:

$$\left| D_x^v D_p^\mu H(x, p) \right| \leq C_{v,\mu} (1 + |x| + |p|)^m, \quad (3)$$

где $C_{v,\mu} > 0$ - константа, m - натуральное число, D_x^v , D_p^μ - дифференциальные операторы такие, что

$$D_x^v = \frac{\partial^{v_1+v_2+\dots+v_n}}{\partial x^{1 v_1} \partial x^{2 v_2} \dots \partial x^{n v_n}},$$

$$D_p^\mu = \frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n}}{\partial p_1^{\mu_1} \partial p_2^{\mu_2} \dots \partial p_n^{\mu_n}}$$

и v_1, v_2, \dots, v_n , $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ - произвольные натуральные числа.

Запишем задачу Коши в следующем виде:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \psi}{\partial t} + H(x, p, t) \psi &= 0 \quad \lambda^r, \\ \psi|_{t=0} &= \exp S_0(x) \varphi_0(x), \end{aligned} \quad (4)$$

где λ - малый параметр.

Точное решение задачи Коши (4) при $\lambda = 1$ ищется в виде:

$$\psi(x, t) = \exp S(x, t) \varphi(x, t), \quad (5)$$

а асимптотическое при $\lambda \rightarrow 0$ порядка $r \geq 0$, а именно:

$$\psi(x, \lambda, t) = \exp \left\{ \frac{1}{\lambda} S(x, t) \right\} \varphi(x, t), \quad (6)$$

где функция $\varphi(x, t) - C^r$ - гладкая по x и t .

После подстановки (6) в (4) получим:

$$\exp \left\{ \frac{1}{\lambda} S(x, t) \right\} \left[\frac{\partial S}{\partial t} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} + H \left(x, \frac{\partial S}{\partial x} - \lambda \frac{\partial}{\partial x}, t \right) \right] \varphi(x, t) = 0 \quad \lambda^r. \quad (7)$$

Пусть $r = 2$. Тогда, учитывая то, что $\exp \left\{ \frac{1}{\lambda} S \right\} = 0 \quad 1$, и раскладывая аналитическое представление (7) по степеням λ , получим с учетом (4) следующие две задачи Коши, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + H \left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t \right) &= 0, \\ t = 0: S_0 &= S_0(x, 0), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right] \varphi(x, t) = 0, \\ t = 0: \varphi_0 = \varphi_0(x, 0). \quad (9)$$

Т. е. на основании (4) получаем задачи Коши (8) и (9), которые порождают решение (6) задачи (4).

Функцию $S(x, t)$, определяемую из уравнения (8), можно представить как действие семейства траектории (1) с функцией Гамильтона $H = H(x, p, t)$, а уравнение (9) определяет перенос во времени $(n+1)$ -мерной поверхности, задаваемой уравнениями

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad i \in 1, n \\ H = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (10)$$

в пространстве R^{2n} в соответствии с уравнениями движения

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ t = 0: x(0) = x_0, \\ p(0) = \frac{\partial S_0(x)}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что решение вида (6) описывает множество достижимости.

При построении асимптотического решения (6) по определению принимается следующий специальный вид функции Гамильтона:

$$H(x, p, t) \psi(x) = \overline{\Phi}_{p \rightarrow x}^{1/\lambda} H(x, p, t) \overline{\Phi}_{x \rightarrow p}^{1/\lambda} \varphi(x), \\ \Phi_{x \rightarrow p}^{1/\lambda} = \left(\frac{1}{2\pi\lambda} \right)^{n/2} \int_{R^n} \exp\left(-\frac{\langle p, x \rangle}{\lambda} \right) \Phi(x) dx,$$

где $\overline{\Phi}_{x \rightarrow p}^{1/\lambda}$ – сопряженное Фурье–преобразование.

Задача Коши (8) решается методом характеристик как лагранжева задача Коши для эволюционного уравнения Гамильтона–Якоби [8]. Уравнения (10) определяют поверхность Ξ , $\dim \Xi = n+1$, в расширенном пространстве конфигураций R_x^{n+1} как лагранжево многообразие с краем $t = 0$, если на Ξ дифференциальная форма замкнута.

$$\omega = \sum_{i=1}^n p_i dx_i - H(x, p, t) dt \quad (12)$$

В этом случае функция

$$S(x, t) = S'(x_0, t) \Big|_{x_0=x_0(x, t)} = \pi_x^{-1} S'(x_0, t)$$

является решением задачи (8) в открытой окрестности $U \subset R_x^{n+1}$, а π_x - однозначная каноническая проекция, такая, что

$$\pi_x: \Xi \rightarrow R_x^{n+1} \quad (13)$$

Решение задачи (9) строится с помощью стандартной подстановки, удовлетворяющей уравнению Лиувилля [8].

В окрестностях точек многообразия, в которых ранг отображения (13) падает, т. е. проекция π_x имеет особенности, асимптотическое решение $\psi(x, \lambda, t)$ строится посредством преобразования (11) по тем переменным x_i, p_i , через которые уравнения (10) разрешимы относительно x_0 и p_0 . Следует отметить, что в (10) H и t – сопряженные переменные. Тогда решение вида

$$\psi(x, \lambda, t) = \overline{\Phi}_{p_i \rightarrow x_i} \psi_i(x_i, p_i, t, \lambda) \quad (14)$$

удовлетворяет уравнению

$$\lambda \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + H(x_i, p_i, t) \psi_i = 0(\lambda^2). \quad (15)$$

2. Общая схема построения топологической структуры динамической системы

Пусть задано лагранжево многообразие Ξ и атлас карт U_j на нем. В каждой из этих карт задана система локальных координат (x_i, p_i) и в каждой из этих карт U_j определяются функции S_j и φ_j , причем S_j удовлетворяет дифференциальной форме ω , суженной на Ξ , а именно:

$$dS_j = (p_j dx_j - x_{j+1} dp_{j+1}),$$

а для системы координат (x_j, p_j) выполняются следующие условия по индексом j :

$$j = j_1, j_2, \dots, j_k, i = j_{k+1}, j_{k+2}, \dots, j_n.$$

В качестве асимптотического решения выбирается функция

$$\psi(x) = \Phi_{p_{j+i} \rightarrow x_{j+i}} \left[\exp \left\{ \frac{1}{\lambda} S \right\} \varphi \right] = \Phi_j(x) \left[\exp \left\{ \frac{1}{\lambda} S_j \right\} D_j \varphi_j \right],$$

$$\text{supp} \varphi_j = U_j,$$

где $D_i(\cdot)$ – произвольные гладкие функции.

Введем следующее обозначение для оператора $\exp(\cdot)$:

$$\exp\left(\frac{1}{\lambda} S_j\right) D_j = \theta_{U_j}$$

Тогда имеем

$$\psi_j(x) = \theta_{U_j}(\varphi_j) \quad (16)$$

Чтобы решения (14) и (16) задавали границу одновременной достижимости в пространстве R^{2n} , необходимо выполнение условия согласованности операторов θ в пересечении карт $U_j \cap U_{j+1}$, т. е.

$$\theta_{U_j}(\varphi) - \theta_{U_{j+1}}(\varphi) \equiv 0 \pmod{\lambda^2}. \quad (17)$$

Это условие эквивалентно выполнению следующих аналитических представлений:

$$\begin{aligned} S_j - S_{j+1} &= x_{j+1} p_{j+1} - x_j p_j, \\ \frac{D_j}{D_{j+1}} &= \left[\frac{\partial(-p_{j2}, x_{j3})}{\partial(x_{j2}, p_{j3})} \right]^{1/2} \exp\left\{ \frac{\pi}{2} |j_2| \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Группа аналитических представлений (18) задает топологические препятствия.

Заключение

Существование топологических препятствий позволяет утверждать, что решение $\psi(x, t)$ не заполняет все фазовое пространство, но дает описание подмногообразия достижимости в R_x^{n+1} . Эти препятствия носят характер одномерных коциклов в теории когомологий лагранжевых многообразий и зависят только от их топологической структуры и способов их вложения в фазовое пространство R^{2n} . Когда выполняется аналитическое представление (18), топологические препятствия отсутствуют и оператор θ_{U_j} дает решение (16), топологически эквивалентное тому, которое характеризует эволюцию множества достижимости динамической системы (1). Обход или уничтожение препятствий достигается асимптотикой решений по малому параметру λ .

Список использованной литературы

1. Щербина Е. С. Особенности задач управления и виброзащиты технологическими процессами в условиях невесомости // Механика гироскопических систем, 2008, вып. 19, с. 200–220.
2. Лобри К. Динамические полисистемы и теория управления. В сб.: Математика. Новое в зарубежной науке. Вып. 14. – М.: Мир, 1979, с. 134–173.

3. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985, с. 223.
4. *Аграчев А. А., Вахрамеев С. А., Гамкрелидзе Р. В.* Дифференциально–геометрические и теоретико–групповые методы в теории оптимального управления. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. Том 14. – М.: ВИНТИ, 1983, с. 3–56.
5. *Семенов В. Н.* Об управляемости нелинейных динамических систем. В сб.: Кибернетика и вычислительная техника. Сер. Сложные системы управления, вып. 8. – Киев: Наукова думка, 1971, с. 34–40.
6. *Давыдов А. А.* Граница достижимости многомерной управляемой системы. В сб.: Труды Тбилисского государственного университета, вып. 232–233, Тбилиси, 1982, с. 78–96.
7. *Давыдов А. А.* Особенности границы достижимости в двухмерных управляемых системах // Успехи математических наук, 1982, т. 37., вып. 3 (225), с. 183–184.
8. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. – М.: Наука, 1977, 384 с.

УДК 001.6

К. Г. Левчук, С. Г. Степаненко

УЧЕНИЙ І ВИХОВАТЕЛЬ КАГОРТИ ІНЖЕНЕРІВ (до 100-річчя з дня народження М. О. КІЛЬЧЕВСЬКОГО)

Достойне місце у плеяді славетних імен Київського політехнічного інституту займає Микола Олександрович Кільчевський – відомий радянський вчений-механік і видатний педагог. 15 червня 2009 року виповнилось 100 років з дня його народження.



М. О. Кільчевський народився в 1909 р. у Кам'янець-Подільському (Хмельницька область) в сім'ї вчителя. У 1928 р. закінчив робітничий факультет при Кам'янець-Подільському сільськогосподарському інституті та вступив на факультет експлуатації шляхів сполучення Київського політехнічного інституту (КПІ). З 1930 р. він студент математичного факультету Київського державного університету (КДУ). Будучи студентом, у січні 1933 р.,

Микола Олександрович починає викладацьку діяльність в Київському авіаційному інституті (КАІ), де викладає вищу математику. У тому ж році після закінчення інституту вступає в аспірантуру КДУ за фахом математика, теорія пружності й опір матеріалів.

У 1936 р. захищає кандидатську дисертацію на тему «Застосування тензорного аналізу до питань теорії пружності» й стає докторантом інституту математики АН УРСР у професора І. Я. Штаермана, який писав у відгуку на кандидатську дисертацію: «Роботи М.О. Кільчевського вже зараз дозволяють дійти висновку, що він має величезний математичний талант, особливістю якого є надзвичайно сильна інтуїція і схильність до геометричного мислення».

З 1938 р. Микола Олександрович читає теоретичну механіку в Київському індустріальному (згодом політехнічному) інституті. У 1940 р. захищає докторську дисертацію «Основні рівняння теорії оболонок і деякі методи їхнього інтегрування» та обирається завідувачем кафедри

вищої математики КАІ. Під час другої світової війни з кафедрою евакуюється до Ташкенту.

В повоєнний період М. О. Кільчевський очолював (1944-1961) одну з найбільших (на той час) кафедр КПІ – кафедру теоретичної механіки. З того часу його педагогічна, науково-дослідна і суспільна діяльність пов'язана з Київським політехнічним інститутом. З 1961 р. завідує відділом аналітичної механіки поліагрегатних систем Інституту механіки АН УРСР. Одночасно – на громадських засадах – професор-консультант у КПІ, член Національного комітету СРСР з теоретичної і прикладної механіки при Мінвузі СРСР, голова наукової ради з проблеми «Загальна механіка» АН УРСР, член редколегії журналу «Прикладная механика».

Кільчевський М. О. працював у різних галузях механіки: теоретична механіка, механіка пластин і оболонок, тензорне числення, теорія співударів тіл, механіка поліагрегатних систем, аналітична механіка континуальних систем. І всюди він знаходив оригінальні методи дослідження.

М. О. Кільчевський був багатогранно обдарованою особистістю. Одна з цих граней – лекторська майстерність. Його блискучі лекції завжди притягували «сторонніх». Це були або викладачі інших вузів, або колишні учні, і, незмінно, його колеги по кафедрі, аспіранти. Осягаючи педагогічну майстерність, уміння абстрактно мислити і робити узагальнюючі висновки, присутні проходили школу глибокого розуміння сутності класичної механіки.

Микола Олександрович багато уваги приділяв роботі з починаючими викладачами, керував їхньою науковою роботою, вважаючи її обов'язковою для успішної роботи викладача. Під керівництвом М. О. Кільчевського здобули науковий ступінь 63 аспіранти, серед них:

- ❖ *академік НАН України Шевченко Юрій Миколайович*
- ❖ *кандидати фізико-математичних наук:*
 - Гончаренко Валентин Михайлович
 - Брусенцова Євгенія Олександрівна
 - Баратов Акрам Баратович
 - Кільчинська Галина Олександрівна
 - Костюк Елеонора Миколаївна
 - Петренко Михайло Петрович
 - Ткачук Галина Іллівна
 - Іздебська Генрієта Анатоліївна
 - Проценко Ольга Павлівна
 - Яковенко Володимир
- ❖ *доценти НТУУ «КПІ»:*
 - Міщук Галина Яківна
 - Ремізова Надія Іванівна
 - Бойко Надія Кузьмівна

- Заплатний Володимир Іванович
- Ільчишина Діна Іванівна
- Шальда Людмила Мирославівна
- Чечельницька Олена Федорівна.

М. О. Кільчевський також вважав, що активна участь студентів в дослідницькій праці дає винятково важливе значення у підготовці студентської молоді до майбутньої творчої діяльності. Технічна освіта повинна підкріплюватися фундаментальними загальноосвітніми знаннями, які більш стали в нинішній час, коли техніка швидко застаріває; тому інженер, що має вузько практичні знання, швидко втрачає особливо важливі здобутки вищої освіти, які полягають у вмінні науково мислити, робити узагальнюючі висновки, успішно застосовувати здобуті знання у творчій праці.

В 1979 р. член-кореспондент АН СРСР А. І. Лур'є писав: «Діяльність Миколи Олександровича лишить слід у нашій науці, досягнення його збережуться в книгах. Не знаю, хто в нашому поколінні висловив стільки оригінальних ідей і наблизився до нього по сумі накопичених знань»¹.

М. О. Кільчевський опублікував понад 200 робіт, серед яких 11 підручників, що вважаються одними з кращих у класичній літературі, і 9 монографій. Характерна риса його як вченого і педагога – надзвичайна вимогливість до себе і до учнів. В 1977 р. він отримав почесне звання заслуженого діяча науки УРСР, був двічі лауреатом Державної премії УРСР і премії ім. О. М. Динника, мав урядові нагороди.

Визначний вчений із світовим ім'ям М. О. Кільчевський ніколи не шкодував ні часу, ні сил на удосконалювання методики викладання теоретичної механіки, домагаючись найбільшої гнучкості і добірності викладу при повному збереженні ідейної частини курсу. Його перу належать 4 абсолютно різних підручника з теоретичної механіки (для університетів, педвузів і втузів), в яких розроблені різноманітні методики викладання курсу теоретичної механіки відповідно з різною кількістю годин за навчальними планами. Студенти КПІ можуть подивитися і послухати три кінолекції, зняті за сценаріями та за участю Миколи Олександровича, і таким чином, прилучитися до майстерності видатного педагога.

Перелік основних друкованих праць М. О. Кільчевського, виданих з 1932р. до 1986р.:

1. 1932 р. Про вплив сили Гауса–Коріоліса на вихри в момент їхнього зародження.
2. 1946 р. Методичні вказівки для заочників фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів.
3. 1949 р. Теория соударений твердых тел (2-а издания 1949, 1969)

¹ Київський політехнік №22 (2875) від 18 червня 2009р.

Механіка гіроскопічних систем

4. 1950 р. Курс теоретичної механіки. Підручник для мех.-мат. і фіз. фак. ун-тів та фіз.-мат. фак. пед. ін-тів УРСР (2-а издания 1950, 1955) часть 1: Кінематика, статика, динаміка точки.
5. 1952 р. Курс теоретичної механіки. Підручник для мех.-мат. і фіз. фак. ун-тів та фіз.-мат. фак. пед. ін-тів УРСР (2-а издания 1952, 1957) часть 2: Динаміка системи.
6. 1954 р. Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике (рум.1955, чеш.1955, кит.1959, 2-а издания 1954, 1972)
7. 1957 р. Курс теоретической механики: Учебник для вузов УССР (2-а тома)
8. 1963 р. Основы аналитической механики оболочек: В 2 частях.
9. 1968 р. Основы теоретической механики: Учебник для студентов немеханических специальностей вузов (2-а издания 1968, 1986)
10. 1970 р. Механика системы оболочка – жидкость – нагретый газ.
11. 1974 р. Лекции по аналитической механике оболочек: Учебное пособие.
12. 1975 р. Основи аналітичної механіки.
13. 1976 р. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар.
14. 1977 р. Курс теоретической механики.
Т.1: Кинематика, статика, динамика точки.
Т.2: Динамика системы, аналитическая механика, элементы теории потенциала механики сплошной среды, специальная и общая теория относительности.
15. 1979 р. Аналитическая механика континуальных систем.

Список використаної літератури

1. *Савин Г.Н., Путята Т.В., Фрадлин Б.Н.* Очерки развития некоторых фундаментальных проблем механики. – Киев: Наук.думка, 1964. – 376с.
2. О работах Н.А.Кильчевского по теоретической механике, с.98, 161, 199.
3. *Кононенко В.О., Лавриненко П.П., Кильчинская Г.А.* Николай Александрович Кильчевский: К 60-летию со дня рождения//Прикл.механика.– 1969.–5, №6.–С. 134-136.
4. Історія Академії наук Української РСР: У 2 кн./Редкол.: Б. Є. Патон (голов.ред.) та ін.. –К. УРЕ: 1979. – Кн.1. –699с.
5. О работах Н.А.Кильчевского и его учеников и краткие биографические данные, с.64, 65, 76, 699.
6. Кільчевський Микола Олександрович// Український радянський енциклопедичний словник: У 3 т. – К., 1978. – 1978. –Т.3. – С.81:фото.
7. Інститут механіки (1919-1989)/Сост. А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш, Б. П. Гуменюк. – Киев: Наук.думка, 1989. – 142с.

УДК 001.6

В. В. Хуторный, А. В. Кулик, И. В. Федоренко, В. Н. Федоров**ОБ ИТОГАХ ЧЕТВЕРТЫХ НАУЧНЫХ ЧТЕНИЙ “ДНЕПРОВСКАЯ ОРБИТА”, ПОСВЯЩЕННЫХ 90 – ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Н. Ф. ГЕРАСЮТЫ**

Уже традиционно осенью на Днепропетровщине, крупном центре промышленных и проектных предприятий, исследовательских институтов и учебных заведений аэрокосмической отрасли, состоялось интересное событие – 10-12 сентября Национальное космическое агентство Украины (НКАУ), Национальный центр аэрокосмического образования молодежи им. А.М. Макарова (НЦАОМ), Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара, Институт технической механики НАНУ и НКАУ, Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» им. М. К. Янгеля», Государственное предприятие «Производственное объединение «Южный машиностроительный завод им. А. М. Макарова» провели четвертые научные чтения «Днепровская орбита». В этом году чтения были посвящены 90 – летию со дня рождения Н. Ф. Герасюты – доктора технических наук, профессора, член-корреспондента АН УССР, основателя украинской научно-технической школы в области баллистики, динамики и устойчивости ракет.



ГЕРАСЮТА НИКОЛАЙ ФЕДОРОВИЧ
(18.12.1919 – 10.04.1987).

Н. Ф. Герасюта родился в г Александрия (Кировоградская обл.). Окончил физико-математический факультет Одесского государственного университета по специальности «Математика» (1941 г.). Сразу после получения диплома был мобилизован в ряды Красной Армии. Служил в саперных войсках. Его боевой путь пролег от Одессы и Днепропетровска до Сталинграда и обратно до Берлина. После окончания боевых действий направлен в группу советских специалистов, изучавших в Германии документацию на немецкую ракету ФАУ-2 (институт «Нордхаузен»). Ему было поручено изучать трофейные материалы, связанные с обеспечением устойчивости движения ракет. Хорошая математическая подготовка, полученная в университете, и природные способности выдвинули Н. Ф. Герасюту в число ведущих специалистов в институте «Нордхаузен». Его научно-технические отчеты отличались четкостью постановки задач, строгостью математических подходов к их решению и практическими выводами. После окончания срока пребывания в институте «Нордхаузен» Н. Ф. Герасюта был направлен во вновь

организованное ОКБ-1 под руководством С. П. Королева, где он получил фундаментальную подготовку в области теории полета ракет, участвуя в создании первой советской ракеты Р-1. Здесь же он закончил заочную аспирантуру и под руководством известного ученого Моисеева написал и защитил диссертацию по устойчивости движения ракет.

В 1951 г. Н. Ф. Герасюта в составе группы специалистов направляется в г. Днепропетровск. Здесь под руководством В. С. Будника на автозаводе, перепрофилированном в ракетный завод, прибывшая группа организует серийное производство ракеты Р-1. Здесь Н. Ф. Герасюта, единственный в группе кандидат технических наук, решал трудные производственные задачи, связанные с комплексной оценкой допустимости принятия на вооружения каждой ракеты, узлы которой имели производственные отклонения.

Н. Ф. Герасюта активно поддерживал инициативу В. С. Будника по разработке ракеты средней дальности на высококипящих компонентах топлива. Именно эти компоненты позволяли создавать ракету, которая в заправленном состоянии могла находиться на стартовой позиции длительное время. В этой работе Н. Ф. Герасюте принадлежат основные технические решения, обеспечивающие заданные тактико-технические характеристики по дальности и точности полета.

Созданная на основе сделанных научно-технических проработок ракета Р-12 (1957 г.) явилась основой для создания ракетных войск стратегического назначения (1959 г.). В эти же годы идет интенсивная работа по созданию ракеты Р-14 и первой советской межконтинентальной ракеты Р-16.

Возникшие в процессе разработки этих ракет многие научно-технические проблемы были обобщены Н. Ф. Герасютой в диссертации «Основные проблемы баллистического обеспечения и динамического проектирования ракет на высококипящих компонентах топлива», представленной на соискание ученой степени доктора технических наук (1960 г.). Сформулированные в диссертации проблемы в области теории полета ракет на многие годы определили направление исследований в коллективе, руководимом Н. Ф. Герасютой. В 1961 г. он утвержден в звании профессора физико-технического факультета ДГУ.

Под руководством Н. Ф. Герасюты в КБ «Южное» сформировалось ядро исследователей, которые успешно решали возникавшие в процессе работы научные проблемы. При этом образовались три направления:

- баллистика и динамика переходных процессов;
- динамика полета и управление;
- преодоление противоракетной обороны вероятного противника.

Эти направления возглавили ближайшие соратники и ученики: Н. Ф. Герасюты доктора технических наук, профессора А. А. Красовский, И. М. Игдалов, Н. И. Урьев. Возглавляемые ими

коллективы под научным руководством Н. Ф. Герасюты обеспечили теоретическими расчетами создание четырех поколений межконтинентальных баллистических ракет, в том числе непревзойденных до настоящего времени в своем классе ракет 1518М («Сатана») и 15Ж61 («Скальпель»).

Н. Ф. Герасюта придавал огромное значение подготовке квалифицированных кадров. С самого основания физико-технического факультета ДГУ он читает лекции студентам, руководит дипломными работами выпускников и первыми аспирантами в ДГУ по ракетной тематике. В 1965 г. он создает кафедру со специализацией по динамике полета и возглавляет эту кафедру по совместительству.

Н. Ф. Герасюта развертывает на кафедре исследовательские работы по проблематике КБ «Южное». По результатам этих работ защищает докторскую диссертацию Ю. Д. Шептун, который стал главным помощником Н. Ф. Герасюты на кафедре. В 1975 при кафедре создана проблемная лаборатория по системам автоматического контроля и измерений. В середине 60-х годов руководство КБ «Южное» во главе с М. К. Янгелем осознает необходимость проведения фундаментальных исследований по теории полета непосредственно в г. Днепропетровске для эффективного научного сопровождения проводимых работ. С этой целью Н. Ф. Герасюте поручается создание академического подразделения по проблемам ракетной техники. Н. Ф. Герасюта проводит огромную организационную работу, в результате которой в Днепропетровске был создан Сектор проблем технической механики, который впоследствии был преобразован в Институт технической механики Академии Наук Украины и Национального космического агентства Украины. В первые годы академическое подразделение возглавляет Н. Ф. Герасюта на общественных началах.

Созданные Н. Ф. Герасютой коллективы в КБ «Южное», ДГУ и ИТМ НАНУ и НКАУ образовали украинскую научно-техническую школу по теории полета ракет. Она получила широкое признание научно-технической общественности в СССР и Украине.

Уникальность этого мероприятия, прежде всего, в его тематике – на Чтениях рассматриваются гуманитарные аспекты освоения человечеством Космоса, взаимоотношения Человека и Космоса, изучение наследия пионеров конструкторских школ ракетно-космической техники. Основные научные направления работы Чтений: история авиации и ракетно-космической техники, философия и космос, аэрокосмическое образование молодежи, экология и космос. Учитывая возрастающий интерес к вопросам правового регулирования современной космической деятельности и проблемам международного космического права XXI

столетия, в этом году было открыто новое направление – экономико-правовые и гуманитарные аспекты освоения Космоса.

Научные чтения «Днепровская орбита» собрали специалистов Украины и России из Днепропетровска, Житомира, Киева, Харькова, Полтавы, Донецка, Симферополя, Москвы, Калуги, Астрахани. Среди участников были специалисты ведущих предприятий и научно-исследовательских институтов ракетно-космической области, сотрудники музеев, представители профессорско-преподавательского состава высших учебных заведений, работники учреждений довузовского образования молодежи. Научные чтения объединили профессионалов-практиков ракетно-космической области, специалистов технических и биологических наук, историков и философов. Всего было заслушано 29 докладов, в обсуждении приняли участие 56 участников и гостей Научных Чтений.

На чтениях были рассмотрены интересные, важные для развития космической деятельности человечества вопросы. В том числе, обсуждались проблемы опасного влияния космической деятельности человечества непосредственно на экосистему, и на ее ближайшее окружение – околоземный космос; возможности и перспективы космических технологий относительно решения проблем улучшения состояния экосистемы; морально-этические аспекты, которые касаются активного проникновения человека в космическое пространство. Значительное внимание отводилось проблемам образования молодежи, новым формам и методам в преподавании знаний; актуальным задачам подготовки специалистов аэрокосмической области; улучшению музейной деятельности в аэрокосмической области и другим вопросам.

Сегодня с уверенностью можно сказать о том, что идея проведения таких научных чтений себя оправдывает, а проблемы, связанные с гуманитарными аспектами ракетно-космической техники, с каждым годом становятся все актуальнее.